МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
АМЕРИКАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ АЗИИ

На правах рукописи

УДК 330.4: 519.86

КЫДЫРАЛИЕВ СЫРГАК КАПАРОВИЧ

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Специальность **08.00.05 Экономика и управление народным хозяйством**

Диссертация на соискание ученой степени
доктора экономических наук

Научный консультант:
д.э.н., профессор
Камчыбеков Т.К.

Бишкек – 2021

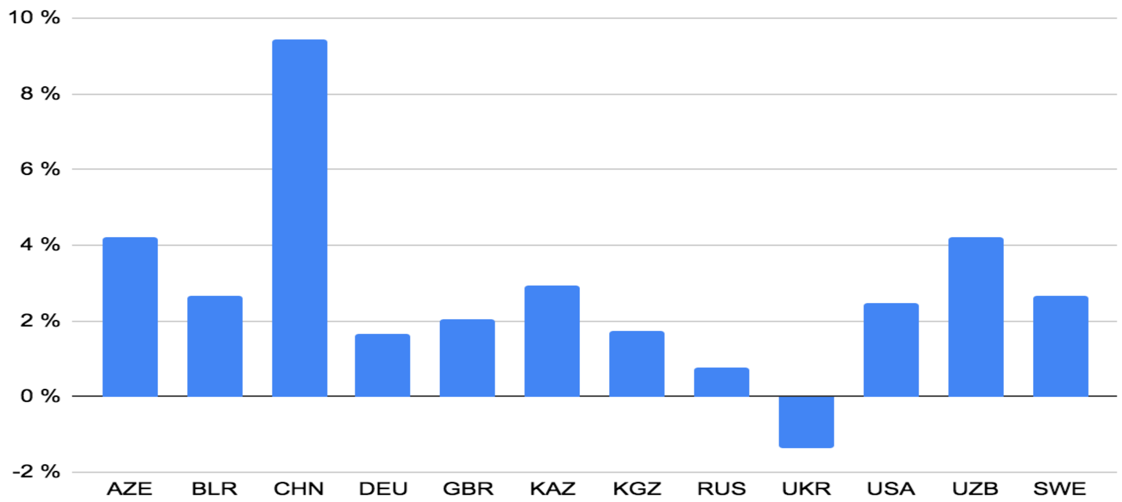
ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

Уровень экономического развития государства определяется величиной Валового Внутреннего Продукта (ВВП) на душу населения. В списке из 190 стран, согласно данным международного валютного фонда (МВФ) за 2018 год Кыргызская Республика занимает в этом списке только 158 место. Кыргызстан ($1268) почти в 50 раз отстает от США (($62605). «Нашел с кем сравнивать» - может сказать скептик. Но проблема в том, что и среднемировой показатель ($11565) почти в десять раз выше нашего. «А зато наш показатель выше, чем у Узбекистана ($1262» - не унимается скептик. Да это так. Но как следует из нижеприведенных данных о росте ВВП разных стран (рисунок 1), Узбекистан сокращает отставание от экономически развитых стран, а Кыргызстан все больше отстает. [1].

Рисунок 1. Средний рост ВВП некоторых стран мира с 1990 до 2018 годы.



Источник: Данные Мирового Банка

Итак, решение задачи ускорения экономического роста является жизненно важной для Кыргызстана [2]. Для того, чтобы решить эту задачу нужно найти правильные ответы на классические вопросы Кто виноват? Что делать?

Одной из главных проблем, определяющих слабый экономический рост, на наш взгляд, является то, что за экономический рост в Кыргызстане никто не отвечает. При этом известно, что в экономически развитых странах проблема обеспечения экономического роста, почти всегда, находится в центре внимания властей.

Конечно, этим должно заниматься правительство в целом, и министерство экономики в первую очередь. Но как известно, в последнее время правительство Кыргызской Республики выполняет роль пожарной команды и ему некогда решать стратегические задачи. В итоге, появляются совершенно неграмотные с экономической точки зрения и не выполнимые в реальной жизни постановления, типа:

запрета на экспорт скота. Во-первых, это совершенно не соответствует рекомендациям экономической теории. Кстати, в диссертации обсуждается вопрос внешней торговли в условиях малой открытой экономики. Во-вторых, всем известна ситуация с Таможенной Службой Кыргызстана. Для ее иллюстрации приведем пару ярких примеров: по словам председателя Государственной таможенной службы А. Торутаева, расхождение данных по экспорту Китая в Кыргызстан и импорту Кыргызстана из Китая по итогам 2019 года составило $3,6 миллиарда; полномочный представитель правительства в Баткенской области Алишер Абдрахманов 16.05.2020 рассказал о цифрах по таможенным сборам на примере контрольно-пропускного пункта «Кайрагач» в Лейлекском районе на границе с Таджикистаном. Так, если в 2019 году на этом участке собиралось 15 тыс. сомов таможенных платежей, то за аналогичный период этого года сборы достигли 5 млн 200 тыс. сомов (*рост в 346 раз по сравнению с аналогичным периодом*);

к экономически неграмотным, по крайней мере по названию, можно отнести и объявленный курс на фискализацию налоговых процедур.

В США, обеспечение экономического роста — это постоянная головная боль Федеральной Резервной Системы, в Китайской Народной Республике, согласно закону, Народный Банк должен формировать и проводить в жизнь монетарную политику, целью которой является поддержание стабильности денежного обращения, и, таким образом, содействие экономическому росту [3]. В Кыргызской Республике аналогом Федеральной Резервной Системы США и

Народного Банка КНР является Национальный Банк. Но, он «очень удачно дистанцируется» от проблем экономического роста, заявляя, что его главная задача, это обеспечение стабильности цен. Но, каждый раз, очередной экономический кризис доказывает, что держать инфляцию в рамках без обеспечения экономического роста невозможно. Известно, что по итогам 2020 года Кыргызстан имеет наихудший показатель инфляции среди стран членов ЕАЭС (9,7%).

Руководство НБКР упорно игнорирует основное уравнение количественной теории денег $PY = MV$, известное даже студентам младших курсов. (Здесь *P — уровень цен, Y — объем ВВП, М — количество денег в экономике, V — скорость оборота денег.*) Здесь можно продемонстрировать громадную пользу от использования количественных методов — при правильном подходе они существенно проясняют суть изучаемой проблемы. Итак, переписав равенство $PY = MV$ в виде $P = MV/Y$, можем видеть, что рост Y, то есть ВВП, который стоит в знаменателе дроби, приводит, при прочих равных условиях, к уменьшению P — уровня цен.

Следует отметить, что в число проблем, требующих вмешательства государства в первую очередь, входят налоговая система и банковский сектор. В результате наведения порядка в этих сферах можно заметно ускорить рост экономики. Более подробно, об этом будет говориться далее.

Также можно подчеркнуть, что одним из главных ресурсов, способных обеспечить экономический рост Кыргызстана является довольно высокий уровень образования в стране.

История знает примеры, когда взятый властью курс на развитие сферы образования в кратчайшие сроки выводил бедные государства в ряды богатейших. Ярчайший образец такого экономического чуда — Сингапур. Не имея природных ресурсов (и даже собственной пресной воды), раздираемый внутренними межнациональными конфликтами, этот крохотный город-государство всего за несколько десятилетий сумел превратиться из нищей страны третьего мира в высокоразвитую геополитическую единицу. По важнейшему экономическому показателю — величине валового внутреннего продукта на душу населения — Сингапур ($64041) превосходит сегодня даже США ($62605) [1]. Один из ключевых факторов, предопределивших это чудо, — качественное образование, уровень которого является одним из лучших в мире. Кыргызстан уже пришел к пониманию того, что образованная молодежь способна стать для республики проводником в лучшее будущее. Сегодня правительство направляет на сферу образования довольно крупные суммы — почти четверть всех расходов государственного бюджета. Осталось сделать решающий шаг — трансформировать количество в качество.

Как говорится в знаменитой книге «Капитал в XXI веке» [4], «Процесс распространения знаний и навыков представляет собой ключевой механизм, обеспечивающий как общий рост производительности, так и уменьшение неравенства в каждой конкретной стране и в международном масштабе. Это показывает пример многих бедных и развивающихся стран, начиная с Китая, которые успешно догоняют богатые страны. В то же время, в результате недостаточных инвестиций в образование целые социальные группы могут лишиться возможности воспользоваться плодами роста или даже оказаться в деклассированном положении и быть вытеснены новыми людьми. Это демонстрируется процессом догоняющего развития одних стран другими (китайские рабочие занимаю место американских, французских и т.д. рабочих). Иными словами, главная сила конвергенции, распространение знаний, лишь отчасти является естественной и произвольной и в значительной степени зависит от политики в области образования, от обеспечения доступа к необходимым навыкам и от институтов, функционирующих в этой сфере».

К сожалению, недостаточное и неумелое использование достижений экономической науки, особенно ее количественных аспектов, тормозит развитие Кыргызской Республики. Ярким примером экономической неграмотности может служить цель удвоения ВВП на душу населения в «Национальная стратегия устойчивого развития Кыргызской Республики (НСУР) на период 2013-2017 годы»

[2]. Для достижения нужно было увеличивать этот показатель более, чем на 14% в год. Такие темпы в течение 5 лет недоступны никакой стране мира.

Следует отметить, что благодаря усилиям видных экономистов, таких как, Рыскулбеков М.Р., Молдокулов А.М., Мусакожоев Ш.М., Койчуев Т.К., Орузбаев А.О., Исраилов М.И., Кудабаев З.И., Кумскова Н.Х., Орозбаева А.О., Чубурова Д.Ч., Токсобаева Б.А., Камчыбеков Т.К., Жапаров А.У., Лукашова И.В. и многих других, уровень экономического образования в Кыргызстане находится на приемлемом уровне. Проблема заключается в необходимости ее модернизации, усилении связи с потребностями современной жизни.

На наш взгляд, важнейшую роль должно сыграть улучшение преподавания экономико-математических методов. Одно из самых ярких высказываний на эту тему принадлежит Рою Вайнтраубу, известному американскому экономисту, автору книги «Как экономика стала математической наукой». По его словам, по мнению большинства ученых, отличительная особенность экономики XX века как науки, это систематизированное представление основного содержания этой дисциплины в математическом виде [5].

Актуален вопрос: какой математике нужно учить экономистов? Необходимо встать на точку зрения великого ученого Галилео Галилея. Он говорил, что Математика — это язык, на котором говорят все науки. Итак, на первый план должен выйти прикладной аспект математики. Нужно постоянно демонстрировать учащимся, каким образом математические знания способствуют решению экономических задач. Необходимо пересмотреть материал, который преподается, начиная со школы. Хотим мы этого или не хотим, существенное изменение предопределяется изменением общественного строя. Мы раньше строили коммунизм. Это замечательная идея. Но, выяснилось, что на данном этапе развития человечества, эта идея не осуществима. Теперь мы живем в условиях рыночной экономики. Главной целью становится получение прибыли. И, независимо от того, нравится нам это или не нравится, нужно готовить учащихся к жизни в этих условиях. Нужно научить определять величину прибыли в простейших условиях, понимать влияние времени на наличные деньги, использовать вероятностные и статистические методы. В школьной программе должны появиться темы Зона прибыли, Введение в линейное программирование, Финансовая математика, Основы статистики и теории вероятностей. Но, где на все это взять время? Это разрешимая проблема. Нужно преодолеть инерцию мышления и критически пересмотреть содержание предметов. Главный вопрос, который при этом должен звучать: «А где это применяется? Зачем это нужно знать?»Например, изучение темы Проценты прекрасно иллюстрируется задачами Финансовой Математики, значение производной — это величина Маржинальной прибыли, эластичность спроса определяется расположением линии спроса и так далее. Учащиеся должны видеть, что математика может помочь при решении, практически, всех экономических проблем. Уместно вспомнить, что Нобелевская премия за научные достижения в области математики не присуждается. В то же время, довольно много математиков является лауреатами этой премии. Дело в том, что умелое использование математических методов помогло им получить Нобелевскую премию по экономике.

Конечно, можно говорить, что вопросы обучения количественным методам не есть тема обсуждения в докторской диссертации по экономике. Для ответа, используем высказывания двух выдающихся государственных деятелей современности.

Джон Фицджеральд Кеннеди: «Прогресс нашей страны не может быть более быстрым, чем прогресс нашего образования».

Ли Куан Ю был первым премьер-министром Сингапура, и во многом благодаря ему, страна, бывшая одной из самых бедных и коррумпированных в мире, превратилась в успешную и процветающую. Он говорил: «Индустриальное общество уступает место обществу, основанному на знаниях, новая линия раздела пройдет в мире между теми, кто обладает знаниями, и теми, у кого их нет. Мы должны учиться и стать частью мира, основанного на знаниях».

Вышесказанное доказывает, что исследование количественными методами состояния экономики Кыргызстана, выявление факторов, которые могут способствовать ускоренному экономическому росту страны, создание и усовершенствование количественных методов, позволяющих расширить научно-методическую оснащенность ученых-экономистов, разработка учебных материалов, повышающих уровень экономической грамотности населения, является актуальным.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Тема диссертационной работы отвечает целям Программы развития КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ на период 2018-2022 гг. «ЕДИНСТВО, ДОВЕРИЕ, СОЗИДАНИЕ» [6], Национальной стратегии развития Кыргызской Республики на 2018-2040 годы [7]; связана с научным направлением «Математика для экономики и бизнеса», реализуемым на департаменте Прикладной Математики и Информатики Американского Университета в Центральной Азии.

Цель и задачи исследования. Цель исследования состоит в разработке новых и адаптации известных методов количественного анализа экономики для принятия научно-обоснованных управленческих решений на микроэкономическом и макроэкономическом уровнях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1) *Углубить понимание базовых экономических проблем, непосредственным образом влияющих на развитие предпринимательства:*

- адаптировать модель CVP (затраты-объемы-прибыль), расширив возможности ее использования;
- систематизировать понимание процесса влияния прямого и косвенного налога на зону прибыли фирмы;
- проанализировать влияние различных видов внешнего воздействия на точку рыночного равновесия в модели спрос-предложение;
- провести количественный анализ понятия эластичность;
- показать на примерах из экономики Кыргызстана, как теория соприкасается с реальной жизнью.

2) *Разработать и внедрить единый подход к финансовым вычислениям, основанный на линейных разностных уравнениях:*

– разработать и внедрить методику использования линейных разностных уравнений для финансовых вычислений;

– развить использование техники разностных уравнений для решения задач оценки акций и облигаций;

– решить задачи определения потоков выплат для различных ипотечных моделей;

– использовать технику рекуррентных вычислений в задачах оценки инвестиционных проектов;

– провести сравнительный анализ методов амортизации.

3) *Проанализировать рост ВВП и состояние банковского сектора Кыргызской Республики и предложить пути решения некоторых проблем экономики и бизнеса:*

– провести анализ темпов развития ВВП Кыргызской Республики путем сравнения с другими странами;

– выявить причины низких темпов роста ВВП и наметить пути их преодоления;

– проанализировать состояние банковского сектора Кыргызстана на предмет наличия элементов картеля.

4) *Разработать способы расширения сферы применения линейных разностных и дифференциальных уравнений в экономике и бизнесе:*

– разработать методы, упрощающие использование в экономике и бизнесе линейных разностных и дифференциальных уравнений первого порядка;

– разработать методы, упрощающие использование экономистами линейных разностных и дифференциальных уравнений высокого порядка;

– разработать новые пути для применения в экономике и бизнесе систем линейных разностных и дифференциальных уравнений.

Научная новизна полученных результатов состоит разработке новых и адаптации методов количественного анализа экономики для принятия научно обоснованных управленческих решений на микроэкономическом и макроэкономическом уровнях.

Результаты диссертационного исследования, имеющие научную новизну:

разработана модель ипотеки с выплатами, предусматривающими рост по арифметической прогрессии;

введено понятие чистой будущей стоимости инвестиционного проекта;

решена проблема множественного IRR;

выявлено, что в основе всех современных методов амортизации лежат свойства арифметической и геометрической прогрессий;

уточнено понятие эластичности и выявлено, что дуговая эластичность не помогает при анализе рыночной ситуации;

предложен новый метод решения линейных разностных уравнений первого порядка;

для анализа экономических проблем, в частности, для модели «спрос-предложение», предложен новый метод решения линейных разностных и дифференциальных уравнений высших порядков, который применен;

важные экономические проблемы, в частности, модель роста ВВП лауреатов нобелевской премии П. Самуэльсона и Дж. Хикса, модели ценовой конкуренции исследованы с использованием нового метод решения систем линейных разностных и дифференциальных уравнений.

Практическая значимость полученных результатов.

Проведенный анализ воздействия прямых и косвенных налогов демонстрирует эффективность широкого использования обязательного патента в экономике Кыргызской Республики.

Выявленное наличие элементов картеля в банковском секторе Кыргызстана обосновывает необходимость мер государственного вмешательства, с целью снижения ставок по кредитам.

Разработанная методика использования линейных разностных уравнений в финансовых расчетах позволяет улучшить администрирование различных финансовых продуктов, в частности, дает возможность расширить линейку ипотечных кредитов.

Теоретические и методические разработки диссертации широко используются в Американском Университете в Центральной Азии, Кыргызско-Российском Славянском университете, Кыргызско-Турецком университете «Манас», Кыргызском Экономическом Университете для учебно-методического обеспечения курсов «Математика для экономистов», «Финансовые расчеты», «Математические методы финансового анализа», «Динамические модели в экономике и бизнесе». Проблемы, связанные с математическим моделированием экономических проблем, регулярно исследуются в курсовых и выпускных квалификационных работах, а также в магистерских диссертациях студентов.

Экономическая значимость полученных результатов. Использование патентной системы, полезность которой обосновывается в диссертации, в экономике Кыргызстана, неизменно приводит к существенному увеличению налоговой выручки.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

– проведен количественный анализ влияния прямого и косвенного налога на зону прибыли на базе модели CVP (затраты-объемы-прибыль) и доказано преимущество паушального налога для общества при максимизации прибыли;

– построена модель для оценки влияния различных видов внешнего воздействия на точку рыночного равновесия в модели спрос-предложение, в том числе на внешнюю торговлю в условиях страны с малой открытой экономикой;

– в результате количественного анализа понятия эластичность доказано, что его нужно связывать только с одной точкой, а коэффициент дуговой эластичности, определяемый двумя точками, не имеет практического значения;

– путем теоретического исследования количественными методами, а также с учетом особенностей Кыргызстана, доказано, что при налогообложении среднего и малого бизнеса, в сфере услуг, использование паушального налога в экономике

Кыргызской Республики является предпочтительным. Этот факт подтверждается успешным применением патентов на практике.

– разработана унифицированная методика вычисления финансовых выражений, таких как Капитализированная сумма, Будущее значение аннуитета, Исходное значение аннуитета, … , рассматривая их как различные варианты задачи решения линейного разностного уравнения;

– предложен новый подход к задачам оценки акций и облигаций с использованием техники разностных уравнений;

– решены задачи определения потоков выплат по ипотеке, позволяющие внедрить новые различные виды ипотеки;

– разработана схема накопленных денежных потоков, позволяющая объединить процесс вычисления различных инвестиционных коэффициентов и дающая обоснование для введение нового коэффициента, актуального для экономики Кыргызской Республики;

– показано, что почти все методы учета амортизации имеют единую математическую основу, что позволяет прояснить процесс их начисления.

– выявлено наличие элементов картеля в банковском секторе Кыргызстана, что, согласно экономической теории, должно быть предметом государственного регулирования.

– предложен метод, позволяющий свести процесс решения линейных разностных и дифференциальных уравнений первого порядка к прямому интегрированию, что позволяет расширить круг задач, решаемых с их помощью в экономике и бизнесе;

– предложен метод «цепочки», упрощающий процесс решения линейных разностных и дифференциальных уравнений высоких порядков, что заметно облегчает их использование в экономических исследованиях;

– предложен метод сведения систем линейных разностных и дифференциальных уравнений к вырожденным системам, существенно упрощающий процесс их решения, что позволяет расширить их использование для моделирования ситуаций в экономике и бизнесе.

Личный вклад соискателя. Предложена модель ипотеки с выплатами, предусматривающими рост по арифметической прогрессии, позволяющая расширить круг лиц, имеющих возможность воспользоваться ипотечными кредитами; введено понятие чистой будущей стоимости инвестиционного проекта; получена формула, связывающая коэффициенты Индекс рентабельности и Чистая текущая стоимость (NPV); путем введения ставки реинвестирования решена проблема множественного IRR; установлено, что все современные методы амортизации основаны на свойствах арифметической и геометрической прогрессий; показано, что дуговая эластичность не помогает при анализе рыночной ситуации и предложен новый подход к вычислению коэффициента эластичности; проведено доказательство наличия элементов картеля в банковском секторе Кыргызстана; при решении экономических задач использованы разработанные автором новые методы решения линейных разностных и дифференциальных уравнений высоких порядков, а также систем линейных разностных и дифференциальных уравнений.

Апробации результатов диссертации. Основные положения и результаты диссертации получили одобрение на заседаниях, научно-практических конференциях, съездах и конгрессах:

Международные научные конференции по экономике «Мусакожоевские чтения» в Кыргызском экономическом университете (Бишкек, Чолпон-Ата, 2008 - 2019);

Конгресс математиков тюркского мира (Алматы, 2009);

7-ая международная конференция «Бизнес и экономическая кооперация на Великом Шелковом Пути». Алматы, Бишкек, июль 2009;

Международная конференция по экономике Евразии в университете Бейкент, Стамбул, Турция, Ноябрь 2010;

Международные научно-практическая конференции «Теоретические и практические аспекты социально-экономического развития стран Центральной Азии и СНГ. АТСО. Алматы, 2010-2013;

Международная научная конференция «Экономика Евразии 2011» Бишкек. КТУ «Манас». 2011;

Научно-практическая конференция «Вопросы применения Налогового Кодекса Кыргызской Республики. КРСУ. Бишкек, 2013;

Международная научно-практическая конференция «Бизнес и образование: интеграционная модель развития». НФ РЭУ им. Г.В. Плеханова. Новосибирск, 2014;

Международная научно-практическая конференция «Великий шелковый путь и евразийское экономическое пространство». КНУ. Бишкек, 2015;

Научно-практическая конференция «Денежно-кредитная политика в развивающихся странах: современные тренды». АУЦА и НБКР. Бишкек 2017;

Международные конференции по социально-экономическим исследованиям ISRC2017, ISRC2018, ISRC2019. Анталья, Турция.

Научный семинар кафедры «Математические методы и исследование операций в экономике» Кыргызско-Российского славянского университета (Бишкек, 2014-2018 гг.).

Кроме того, автор является членом научно-экспертного совета Национального Банка Кыргызской Республики; членом учебно-методической комиссии по экономике при Министерстве Образования и Науки Кыргызской Республики.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные положения и результаты диссертации представлены в более чем 100 работах, опубликованных в журналах, изданных в Кыргызской Республике и за рубежом, и сборниках научных трудов. Многие результаты вошли в учебники и учебные пособия, в том числе с грифом Министерства образования Кыргызской Республики.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, содержащих двадцать один параграф, заключения и списка использованных библиографического источников, включающего 150 наименований. Каждая глава состоит из параграфов, номер каждого параграфа состоит из двух цифр: первая показывает номер главы, вторая — номер параграфа внутри главы. Каждый параграф состоит из пунктов, номер каждого пункта состоит из трех цифр: первая показывает номер главы, вторая — номер параграфа внутри главы, третья — номер пункта внутри параграфа. Работа изложена на 278 страницах, содержит 8 таблиц и 17 рисунков. Номер каждого рисунка и каждой таблицы параграфа состоит из трех цифр: первая и вторая показывают номер параграфа, в котором находится рисунок\таблица, третья — номер внутри параграфа.

ГЛАВА 1
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ В ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

На вопрос об использовании математики в экономике Милтон Фридман говорил: «Повторю то, что сказал об экономике Альфред Маршалл: переведите свои результаты на английский язык, а потом сожгите математические расчеты» [5]. Мы понимаем эти слова следующим образом: Используя математику, можно получить новые знания о функционировании экономики. Далее, эти знания надо переосмыслить и изложить так, чтобы основные посылки и выводы стали понятны, тем, кто не владеет математикой на высоком уровне.

Для того чтобы понимать действие экономического механизма, необходимы соответствующие знания. Эти знания можно и нужно приобрести начиная со школы. Самые элементарные знания могут быть получены в начальной школе, через задачи типа «У Анары 50 сомов, порция мороженного 15 сомов. Сколько порций мороженного может купить Анара?» Более методично изучение экономики можно начинать в средней школе. Так, в нашем учебнике Математики для 5 класса изложено введение в модель CVP [8]. Конечно, язык изложения должен быть понятен для школьников. Далее, модель CVP используется для анализа влияния налогов на предпринимательскую деятельность.

Стоит отметить важность доведения до предпринимателей Кыргызской Республики понятия эластичности. Они должны понять, что в соответствующей ситуации — при эластичном спросе, снижение цены может принести пользу бизнесу. Считаем уместной ссылку на книгу Дэвида Рокфеллера «Банкир в XX веке» [9]:

Компания «Стандарт ойл» была монополией. В период своего расцвета она контролировала 90% национальной нефтяной промышленности. Политика, проводившаяся Джоном Д. Рокфеллером, была направлена на снижение цен. При этом он исходил из того, что чем менее дорогим является данный вид продукции, тем больше его будут покупать, а чем больше рынок, тем в большей степени *компания «Стандарт ойл» сможет иметь сможет иметь прибыли за счет большего масштаба производства. Не имея экономического образования, он понимал смысл «эластичного спроса». Он всегда считал хорошим бизнесом «увеличение объема продаж при меньшей прибыли на единицу товара».*

Для того чтобы подчеркнуть важность изложения, основанного на примерах, приведем ссылку на слова выдающегося экономиста Дэвида Касса [5]. *На первом занятии по макроэкономике в аспирантуре в Стэнфорде я понял, что недостаточно подготовлен чтобы учится. Поэтому записался на математический анализ и теорию вероятностей и статистику. Теорию вероятностей преподавал специалист мирового класса. Это было замечательно, поскольку он иллюстрировал все понятия примерами. Потом вы могли легко подготовиться к экзамену, так как хорошо представляли себе, что это за предмет.*

§1.1. Количественные аспекты модели Анализ Затрат-Объемов-Прибыли (CVP Analysis)

Экономические ресурсы — это одно из основных понятий экономической теории. Адам Смит рассматривал такие экономические ресурсы, как труд, земля и капитал. Однако наиболее четко теорию трех факторов производства сформулировал французский экономист Жан Батист Сэй (1767—1832). Английский экономист Альфред Маршалл (1842—1924) предложил добавить четвертый фактор — предпринимательские способности. Спор сторонников этих подходов продолжался до конца XX века. Развал Советского Союза и падение экономик постсоветских государств ярко продемонстрировал важность предпринимательских способностей. Эти страны имели труд, землю и капитал, но фактическое отсутствие предпринимательских способностей привело к резкому сокращению ВВП. Так, к 2000 году, через 10 лет после начала реформ, по переходу от командной экономики к рыночной, Латвия потеряла 36% ВВП, Литва — 35% ВВП, Российская Федерация — 38% ВВП, Украина — 58% ВВП [10].

В то же время важно отметить, что предпринимательские способности нужно подкреплять соответствующими знаниями. К примеру, в США ежегодно регистрируется около 600 тыс. малых предприятий и ликвидируется около 500 тысяч [11]. Конечно, имеется много различных причин, объясняющих такое количество ликвидаций, но недостаток соответствующих знаний находится в числе главных.

В данном параграфе предлагается простое и наглядное введение в модель CVP (Cost – Volume - Profit), доступным образом объясняющее процесс нахождения точки перелома — BEP (break-even point) [12 - 15].

Несмотря на кажущуюся простоту, правильное определение BEP позволяет добиваться успеха в бизнесе, а ошибки могут порождать громадные убытки. Проиллюстрируем это утверждение следующим сообщением СМИ: Airbus прекращает производство широкофюзеляжных самолетов A380. В 2021 г. он завершит их поставки. Причина — фирма не достигла BEP. Первоначально Airbus оценил точку безубыточности в 420 единиц, но к концу января 2019 года у A380 было только 316 заказов. Проект поглотил 28 миллиардов евро, что кажется невосстановимым [16].

1.1.1. Задача

Фирма Альфа возит шоколад на остров и продает ящик шоколада за 12 дирхемов. Каждый ящик шоколада она покупает на материке за 8 дирхемов. Постоянные расходы на каждое плавание (зарплата моряков, еда, налоги султану…) составляют 140 дирхемов.

Сколько ящиков шоколада должна купить на материке, а затем продать на острове фирма, для того чтобы полностью окупить все свои затраты?

Решение

Существуют два подхода к решению этой задачи.

Первый способ: Фирма Альфа полностью окупит все свои затраты, если ее выручка будет равна общим затратам. То есть должно иметь место равенство

R* = *TC. Итак, $12q = 8q + 140$. Отсюда, $q = 35$. Таким образом выяснилось, что фирма полностью окупит все свои затраты, если купит на материке и затем продаст на острове 35 ящиков шоколада.

Очень полезно в одной и той же системе координат нарисовать графики функций выручки и общих затрат, задающих левую и правую части уравнения
$12q = 8q + 140$ (рисунок 1.1.1).

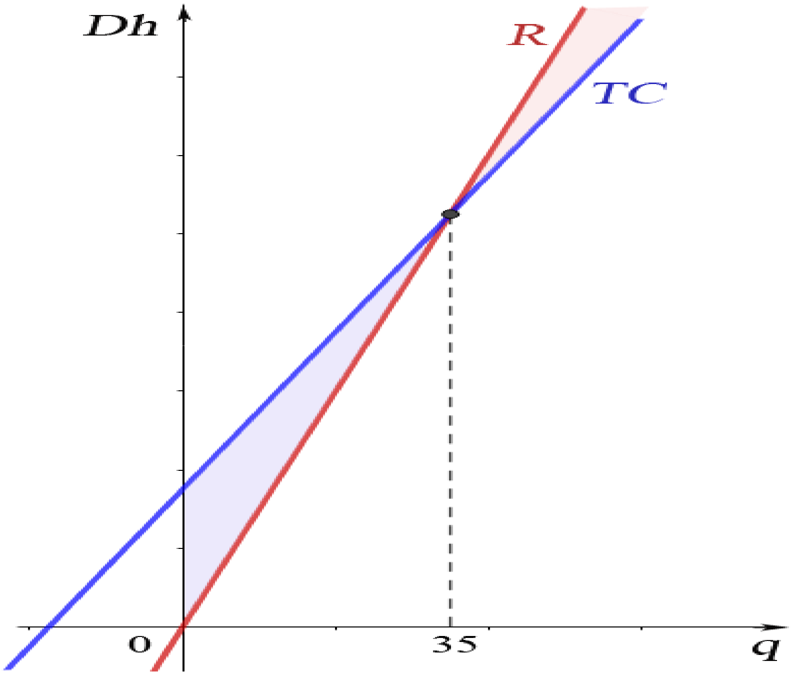


Рисунок 1.1.1 – Графики функций выручки и общих затрат

Как известно, корнем уравнения является координата точки пересечения графиков. В экономике, первая координата точки пересечения графиков выручки и общих затрат называется точкой перелома (break-even point). Она делит ось
$[0; \infty)$ на зону убытков и зону прибыли.

Второй способ: Нужно выписать функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R - TC = 12q - (8q + 140) = 4q - 140,$ а затем приравнять ее к нулю: $4q - 140 = 0$. Корень этого уравнения $q = 35$ определяет точку перелома (рисунок 1.1.2).

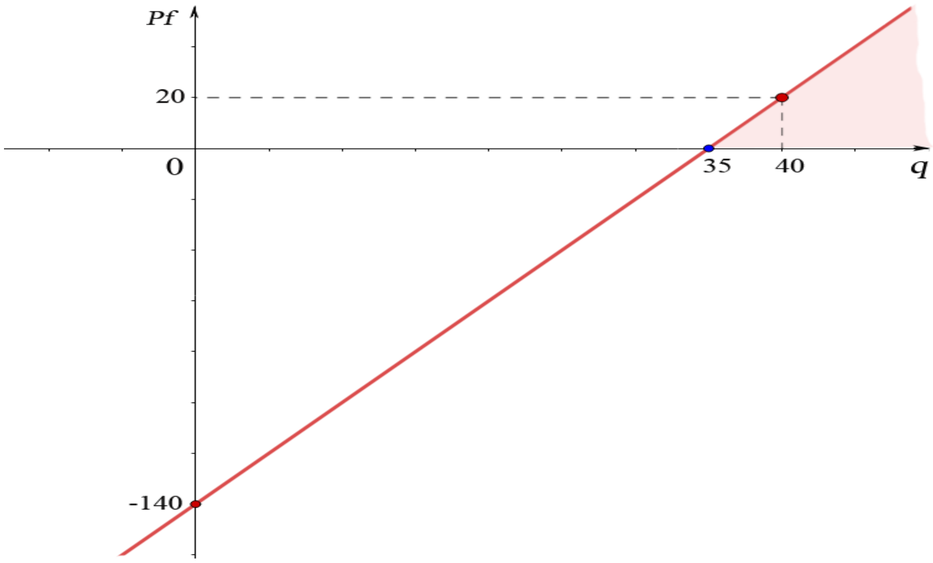


Рисунок 1.1.2 – График функции прибыли

Эта очень простая, с точки зрения математики модель, является очень важной с точки зрения бизнеса. Наша фирма прежде чем начнет покупать шоколад и нанимать команду моряков должна, хотя бы примерно, найти точку перелома. Она может начать начать свой бизнес только в том случае, если уверена в том, что сумеет продать количество шоколада превышающее значение точки перелома.

1.1.2. Задача

Правительство страны, в которой работает фирма Альфа, ввело новый налог. Теперь фирма каждый раз, прежде чем отправиться в плавание должна заплатить 30 дирхемов.

В результате постоянные расходы на каждое плавание увеличились до 170 дирхемов. Остальные данные не изменились: фирма каждый ящик шоколада покупает на материке за 8 дирхемов и продает на острове за 12 дирхемов.

Сколько ящиков шоколада фирма купила на материке и продала на острове во время очередного плавания, если

a) она вернула затраченные деньги;

b) она получила прибыль, равную 40 дирхемам;

c) ее убытки составили 22 дирхема?

Решение

По сравнению с предыдущей ситуацией поменяется только функция общих затрат: вместо $TC = 8q + 140$ будет $TC_1 = 8q + 170$. Используем второй подход из предыдущей задачи. Выпишем функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R - TC_1 = 12q - (8q + 170) = 4q - 170$, а затем приравняем ее к нужному значению.

В итоге, получим три уравнения:

a) она вернула затраченные деньги ⇔ $4q - 170 = 0$;

b) она получила прибыль, равную 40 дирхемам ⇔ $4q - 170 = 40$;

c) ее убытки составили 22 дирхема ⇔ $4q - 170 = -22$.

Решив эти уравнения, мы узнаем, что

a) она вернула затраченные деньги, если купила и продала *42,5* ящика шоколада — другими словами BEP равна 42,5**;**

b) она получила прибыль, равную 40 дирхемам, если купила и продала *52,5* ящика шоколада;

c) ее убытки составили 22 дирхема, если она сумела купить и продать только *37* ящиков шоколада.

Нарисуем графики функций прибыли и увидим, что введение налога — изменение свободного члена, в данном случае 140 на 170, приводит к параллельному сдвигу линии общих затрат. С точки зрения экономики получаем очевидную вещь — повышение прибыли увеличивает зону убытков и соответственно, сужает зону прибыли (рисунок 1.1.3).

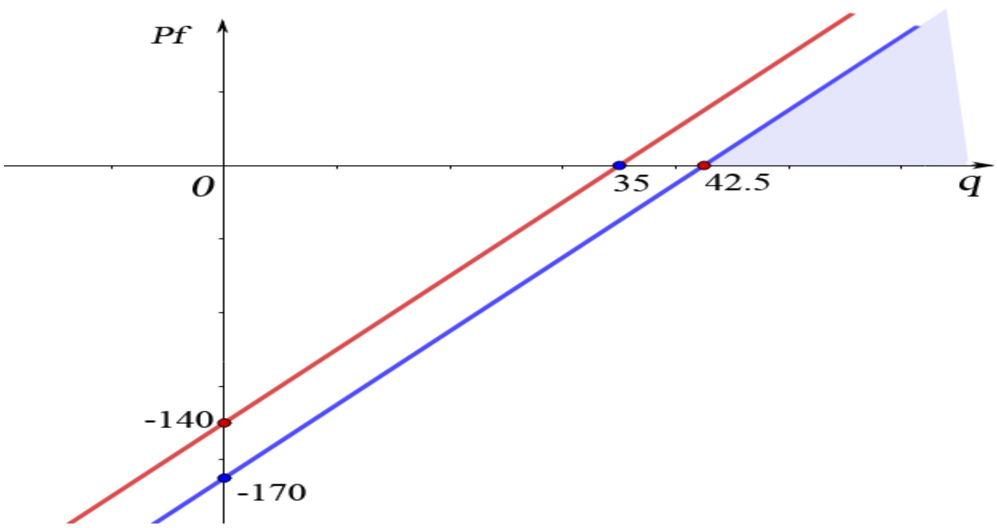


Рисунок 1.1.3 – Изменение графика функции прибыли при паушальном налоге

Следует отметить, что в экономической теории налог, рассмотренный в этом случае, называется паушальным. Итак, паушальный налог (lump sum tax) — это налог, который взимается в виде некоторой фиксированной денежной суммы.

1.1.3. Задача

Правительство страны в очередной раз повысило налоги. Теперь фирма Альфа каждый ящик шоколада покупает на материке за 8,6 дирхемов. Остальные данные не изменились: фирма каждый ящик шоколада продает на острове за 12 дирхемов, постоянные расходы на каждое плавание равны 170 дирхемов. Чему равна в BEP этом случае?

Решение

Итак, из условий задачи получаем: $12q = 170 + 8{,}6q$. Таким образом BEP равна: $170/(12 - 8{,}6) = 50$. В отличие от паушального налога, рассмотренного в предыдущем случае, теперь имеет место акцизный налог. Акцизный налог (excise tax) есть некоторая фиксированная денежная сумма, которая выплачивается с каждой проданной единицы товара или услуги. Введение или изменение акцизного налога приводит к соответствующему изменению предельных издержек MC и, соответственно, к повороту линии общих затрат.

В пунктах 1.1.1-1.1.3 рассматривались простейшие линейные модели. В этих задачах используется математический инструментарий уровня 5-7 класса школы. Несмотря на свою простоту, эти задачи иллюстрируют важную мысль — начинать новый бизнес стоит только в том случае, если есть реальная возможность изготавливать и продавать товар в количестве превышающем величину BEP. Можно предположить, что соответствующие соображения повлияли на принятие отрицательного решения в активно обсуждавшейся во времена К. Бакиева идее начать производство белорусских тракторов в Кыргызстане. Надеемся, что подобные расчеты будут проведены и при принятии решения о производстве электромобилей в нашей стране. В то же время, важно понимать, что нужно не только иметь возможность достичь точки BEP. Также важно иметь возможность продать произведенный товар по приемлемой цене. Картофель, произведенный в Кыргызской Республике в 2018 году, который не удалось продать по цене, покрывающей издержки, генерировал серьезные проблемы, вплоть до отставки министра сельского хозяйства. Соответствующая модель обсуждается в последующих разделах.

1.1.4. Из предыдущих рассмотрений может сложиться ложный вывод: чем больше производим и продаем, тем лучше. Любая фирма может увеличивать объемы продаж не меняя цену только в том случае, если она занимает незначительную долю рынка. В обычной ситуации, увеличить объем продаж можно только уменьшив цену.

Задача

Фирма Бета изготавливает и продает лампы по цене $p = 4 - 0,05q$ *динаров, где* q *— число проданных ламп. Постоянные расходы фирмы (аренда мастерской, налоги ...) составляют 20 динаров, затраты на производство одной лампы равны 1,1 динаров. Сколько ламп должна изготовить и продать фирма для того, чтобы получить прибыль?*

Решение

Также как и в линейном случае существуют два подхода к решению этой задачи.

Первый способ: Фирма полностью окупит все свои затраты, если ее выручка будет равна общим затратам. То есть должно иметь место равенство

$\boldsymbol{R = TC}$: $(4 - 0,05q)q = 1,1q + 20$. Очень полезно нарисовать графики функций выручки и общих затрат, задающих левую и правую части уравнения

$4q - 0,05q^2 = 1,1q + 20$ (рисунок 1.1.4).

Итак, $q_1 = 8;$ $q_2 = 50.$ Таким образом выяснилось, что фирма получит прибыль, если изготовит и продаст от 8 до 50 ламп.

Эта математическая модель показывает, что нужно произвести и продать больше определенного числа единиц товара, для того чтобы покрыть постоянные расходы. В то же время, для того чтобы продавать большее количество товара нужно снижать цену, которая с некоторого момента перестанет покрывать переменные затраты.

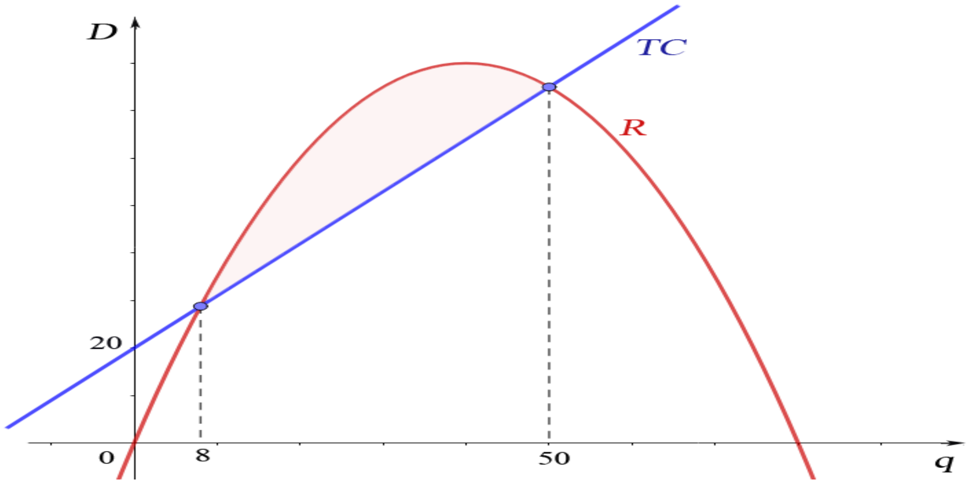


Рисунок 1.1.4 – Графики квадратичной функции выручки и функции общих затрат.

Второй способ: Нужно выписать функцию прибыли как разность функций выручки и общих затрат: $Pf = R - TC = (4 - 0{,}05q)q - (1{,}1q + 20) =$
$- 0{,}05q^2 + 2{,}9q - 20,$ а затем приравнять ее к нулю. Корни полученного уравнения определяют зону прибыли: [8; 50]. Нарисуем график функции прибыли, которая является перевернутой параболой (рисунок 1.1.5):

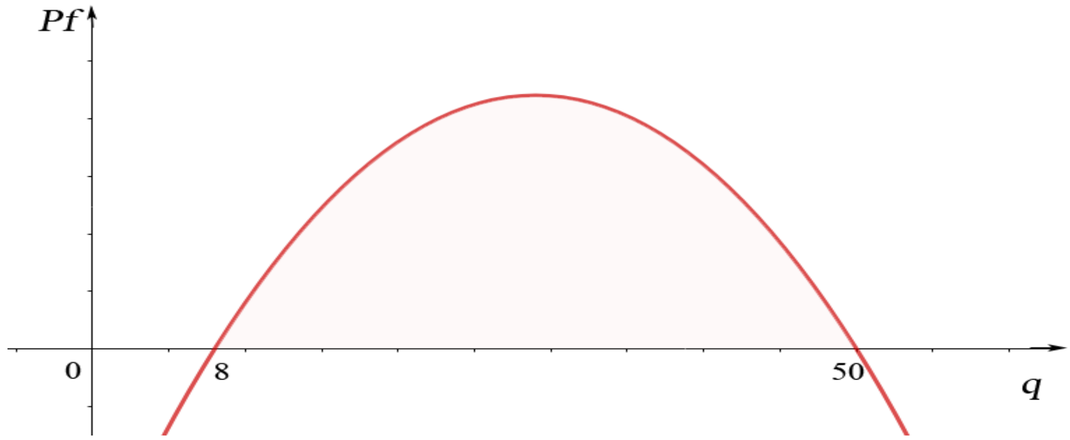


Рисунок 1.1.5 – График квадратичной функции прибыли

1.1.5. Задача

В условиях предыдущей задачи, фирма Бета узнала, что правительство ввело новый налог. Какой будет зона прибыли, если нужно платить:

a) налог величиной 4 динара за право торговать лампами — паушальный налог;

b) налог величиной 0,4 динара за каждую проданную лампу — акцизный налог?

Решение

a) В результате введения паушального налога общие затраты будут выражены функцией $C_l = 1{,}1q + 20 + 4$, а зона прибыли лежит между корнями уравнения $(4 – 0{,}05q)q = 1{,}1q + 20 + 4 \Leftrightarrow 4q – 0{,}05q^2 = 1{,}1q + 24 \Leftrightarrow$
$–0{,}05q^2 + 2{,}9q – 24 = 0$. Выяснилось, что фирма, в случае налога величиной 4 динара за право торговать лампами, получит прибыль, если он изготовит и продаст от 10 до 48 ламп.

b) В случае введения акцизного налога общие затраты будут выражены функцией $C_e = 1{,}1q + 20 + 0{,}4q$, а зона прибыли будет определяться корнями уравнения $(4 – 0{,}05q)q = 1{,}1q + 20 + 0{,}4q \Leftrightarrow 4q – 0{,}05q^2 = 1{,}5q + 20 \Leftrightarrow$
$–0{,}05q^2 + 2{,}5q – 20 = 0 \Rightarrow q_1 = 10; \quad q_2 = 40.$

Итак, в случае налога величиной 0,4 динара за каждую проданную лампу, фирма получит прибыль, если изготовит и продаст от 10 до 40 ламп.

Итак, мы рассмотрели процесс нахождения зоны прибыли и показали, как введение нового налога, как паушального так и акцизного, приводит к сужению этой зоны. На следующем этапе будет естественно постараться ответить на вопрос: «Как максимизировать прибыль?»

1.1.6. Задача

Фирма Бета изготавливает и продает лампы по цене $p = 4 – 0{,}05q$ *динаров, где* q *— число проданных ламп. Постоянные расходы фирмы (аренда мастерской, налоги ...) составляют 20 динаров, затраты на производство одной лампы равны 1,1 динаров.*

Сколько ламп должна изготовить и продать фирма для того, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение

Выпишем функцию прибыли, как разность функций выручки и общих затрат:
$Pf = R – TC = (4 – 0{,}05q)q – (1{,}1q + 20) = (4q – 0{,}05q^2) – (1{,}1q + 20).$
Приравняв к нулю производную: $(4 – 0{,}1q) – 1{,}1 = 0$, выясним, что максимум прибыли будет достигнут при $q = 29$. Итак, фирма получит максимальную прибыль: $(4 – 0{,}05 \cdot 29)29 – (1{,}1 \cdot 29 + 20) = 73{,}95 – 51{,}9 = 22{,}05$ динаров, если

изготовит и продаст 29 ламп. Следует отметить, что равенство нулю производной: $Pf' = R' - TC' = 0$, которым мы воспользовались для определения оптимального количества ламп, можно переписать в виде $R' = TC'$. Примем во внимание то, что на языке микроэкономики $R' = MR$, а $TC' = MTC$, и еще раз произнесем одно из важнейших правил микроэкономики: *максимум прибыли достигается тогда, когда маржинальная выручка равна маржинальным затратам*.

1.1.7. Задача

В условиях предыдущей задачи, фирма Бета должна платить дополнительный налог. Как она может максимизировать прибыль, если нужно платить:

a) налог величиной 0,4 динара за каждую проданную лампу — акцизный налог;

b) налог величиной 10 динаров за право торговать лампами — паушальный налог?

Решение

a) В случае акцизного налога, функция прибыли:

$Pf_e = (4 - 0{,}05q)q - (1{,}5q + 20) \Leftrightarrow -0{,}05q^2 + 2{,}5q - 20.$

Так как производная равна: $-0{,}1q + 2{,}5$, максимум прибыли будет достигнут при $q = 25$. Итак, в случае акцизного налога величиной 0,4 динара за каждую проданную лампу фирма получит максимальную прибыль, если изготовит и продаст 25 ламп по цене: $4 - 0{,}05 \cdot 25 = 2{,}75$ динаров. При этом прибыль будет равна: $-0{,}05 \cdot 25^2 + 2{,}5 \cdot 25 - 20 = 11{,}25$ динаров, а налоговая выручка: $0{,}4 \cdot 25 = 10$ динаров

b) В случае паушального налога функция прибыли имеет вид:

$Pf_l = (4 - 0{,}05q)q - (1{,}1q + 20 + 10) = -0{,}05q^2 + 2{,}9q - 30.$

Вычислив производную: $-0{,}1q + 2{,}9$, выясним, что максимум прибыли будет достигнут в той же точке, что и в безналоговом случае: при $q = 29$. Поэтому, и в этом случае, фирма получит максимальную прибыль, если изготовит и продаст 29 ламп по цене: $4 - 0{,}05 \cdot 29 = 2{,}55$ динаров. При этом величина прибыли уменьшится на 10 динаров — на величину налога:

$(4 - 0{,}05 \cdot 29)29 - (1{,}1 \cdot 29 + 30) = 73{,}95 - 61{,}9 = 12{,}05$ динаров.

Сравним воздействие налогов. В обоих случаях государство получит одинаковую сумму: 10 динаров. Но прибыль фирмы не одинакова: в случае паушального налога она равна *12,05* динаров, в случае акцизного — равна *11,25* динаров. Эта разница определяется повышением цены и уменьшением объема продаж при введении акцизного налога.

Приведенные выкладки показывают, что при построении налоговой системы, служащую интересам страны, а не недобросовестной части работников налоговых служб, особенно в странах с низкой налоговой культурой, характерной для постсоветских стран, за основу нужно брать обязательный патент. Для того чтобы еще раз подкрепить этот тезис, обратимся к мнению одного из самых известных современных экономистов, лауреата Нобелевской премии, Дж. Ю. Стиглица [17]. *Любая налоговая система оказывает влияние на поведение людей. Поскольку государство забирает деньги у отдельных лиц, мы ожидаем, что оно взамен будет каким-то образом реагировать на их более низкие доходы. Когда мы говорим, что хотим, чтобы налоговая система была не искажающей, ясно, что мы не подразумеваем, что при этом индивидуум не будет затронут. Налог является неискажающим тогда и только тогда, когда индивидуум не может предпринять что-либо, чтобы изменить свои налоговые обязательства. Экономисты называют неискажающие налоги паушальными налогами. Любой налог на товар — искажающий: человек может изменить свои налоговые обязательства, просто сократив покупки соответствующего товара. Таков же и любой подоходный налог: сократить его можно, просто меньше работая или сберегая.*

Искажающие налоги неэффективны в том смысле, что, если бы государство могло заменить их паушальным налогом, оно получало бы более крупные поступления при тех же последствиях для благосостояния людей или соответственно государство могло бы сохранять те же поступления, но увеличивать благосостояние людей.

Итак, по Стиглицу, каждый раз заменяя какой-нибудь налог на паушальный государство получает выигрыш или в виде большей налоговой выручки, или в виде повышения благосостояния своих граждан.

§1.2. Количественный анализ различных видов налогов

Практика должна быть воздвигнута на хорошей теории.
Влюбленный в практику без науки —
словно кормчий, ступающий на корабль без руля и компаса.
Леонардо да Винчи

1.2.1. *Как все это просто* – можно заявить, говоря о налогах с теоретической точки зрения.

Как все это непонятно – говорим мы, сталкиваясь с действующей системой налогообложения.

В данном параграфе изложены материалы исследования налоговой системы Кыргызской Республики, которое проводилось, начиная с 2005 года [18-24].

Как-то, по Кыргызскому телевидению показывали сюжет о том, как работники налоговой службы проверяли работу одного из ресторанов города Бишкек. Для того чтобы сказать, что они там выявили «к бабке ходить не надо» - конечно же, было выявлено, что выручка ресторана намного выше, чем та сумма, которая указывалась при выплате налога. Понятно, что владельцы ресторана поступают нехорошо.

Как Вы думаете, какими будут результаты аналогичных проверок в других ресторанах?

Конечно, можно долго говорить об испорченности нравов, о том, что у нас не работают законы и т.д. и т.п., но мы рискнем заявить, что корни проблемы находятся в другом месте. Дело в том, что система налогообложения Кыргызстана в отдельных случаях вступает в противоречие с экономической теорией. Любой человек, мало-мальски знакомый с основами экономической теории, да и просто, исходя из здравого смысла, скажет, что главной целью фирмы является получение максимальной прибыли. Одним из путей максимизации прибыли является минимизация налоговых выплат — это и делают все бизнесмены.

Но так как для функционирования государственной машины нужны деньги, налоги должны собираться. Как улучшить ситуацию? Может быть, в каждом ресторане нужно иметь постоянных работников налоговой службы? К сожалению, это не улучшит ситуацию и только спровоцирует усиление коррупции.

Налоговая политика является важнейшей частью экономической политики любого государства. Она способна как стимулировать экономический рост, так и наоборот, препятствовать этому. К сожалению, в системе налогообложения существует несколько привычных, но на наш взгляд, неправильных моментов, на которые не обращается внимание. Для того чтобы не быть голословными, зададимся несколькими вопросами.

Вопрос 1

Каких торговых предприятий в 2006 году в Кыргызстане было больше: с объемом выручки от 2 до 3 миллионов сомов или от 3 до 4 миллионов сомов?

Вопрос 2

В стране X, которая одной из основных целей провозгласила быстрый экономический рост, существует закон в поддержку малого предпринимательства. По этому закону фирмы, годовой доход которых не превышает 20 миллионов, облагаются подоходным налогом в 6%, остальные должны платить 13%. Как вы думаете, сколько разумных фирм в данной стране имеют годовую выручку 21 миллион?

Вопрос 3

Должен ли водитель автобуса купить билет на автобус, которым он сам управляет?

Указание к вопросу 1

Воспользуйтесь следующей информацией:

Власти Кыргызстана с целью упрощения налогообложения малого предпринимательства решили, что торговые предприятия, объем выручки которых меньше 3 миллионов сомов, платят налог в размере 5% от выручки, а остальные, с большим объемом выручки, 10% и больше.

Указание к вопросу 2

Подсчитайте размеры налога при объеме дохода 20 млн. и 21 млн.

Указание к вопросу 3

Подумайте еще над одним вопросом: для каких целей государство взимает налог с заработной платы государственных служащих?

Ответ на вопрос 1

Мы не имеем соответствующих статистических данных, но готовы поспорить на большую сумму, утверждая, что фирм 1-ого вида намного больше. И причина конечна ясна. Когда есть возможность уклониться от налога, то почти все это делают!

Ответ на вопрос 2

Правильно, ни одной! Дело в том, что чистый доход фирмы, имеющей 20 миллионов дохода равен $20(1 – 0,06) = 18,8$ миллионов, а фирмы, имеющей 21 миллионов: $21(1 – 0,13) = 18,27$ миллионов.

То есть, фирмы, доход которых несколько больше 20 миллионов сделают все возможное, для того чтобы скрыть часть выручки, а если это невозможно, просто-напросто престанут в конце года работать. И если имеется большое количество таких фирм, то экономика страны недосчитается значительной части достижимого ВВП.

Ответ на вопрос 3

С зарплаты каждого государственного служащего взимается налог, который идет на выплату части последующих зарплат этого же человека. Эта абсурдная ситуация имеет место во многих странах, но все привыкли к этому, и видимо не замечают.

Почти все согласны, что налоговая система нуждается в реформе. Но очень часто, попытки улучшения приводят к ставшей крылатой фразе – *Хотели как лучше, а получилось, как всегда*. На наш взгляд причина в том, что при принятии соответствующих законов часто забывают об экономической науке. И это относится не только к Кыргызстану – это имеет место почти везде. Ярким примером является закон об ограничении импорта японских автомобилей, принятый в 1981 году в США, и отмененный впоследствии, как наносящий вред экономике США. (Более подробно об этом можно прочитать в популярном учебнике «Микроэкономика» Пиндайка и Рубинфельда [25].)

1.2.2. Пример 1 (Кривая Лэффера)

Пусть на некотором рынке спрос и предложение заданы функциями $p_D = c - dq_D$ и $p_S = a + bq_S$ $(c, d, b > 0)$.

Тогда, рыночная цена p_E и объем продаж q_E определяются уравнениями $p_D = p_S$; $q_D = q_S$. Отсюда, $c - dq_E = a + bq_E \Rightarrow q_E = \frac{c-a}{b+d}$; $p_E = \frac{cb+ad}{b+d}$.

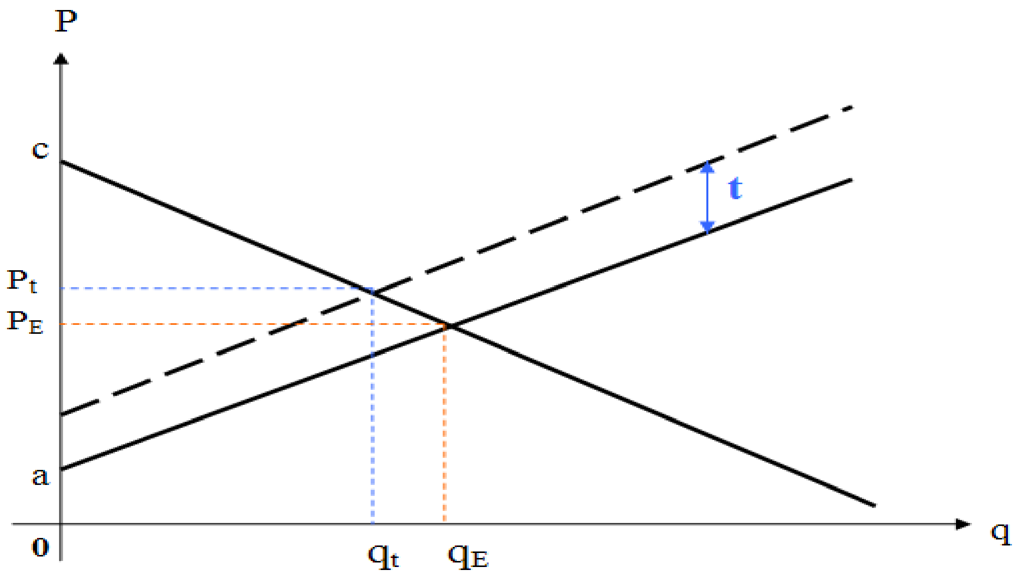


Рисунок 1.2.1 - Влияние акцизного налога.

Акцизный налог величиной t, выплачиваемый продавцом с каждой единицы проданного товара, уменьшает предложение (сдвигает линию предложения влево-вверх) и приводит к увеличению равновесной рыночной цены p_t и уменьшению объема продаж q_t (рисунок 1.2.1). Покажем это.

Из условия равновесия на рынке $p_D = p_S + t$; $q_D = q_S$ получаем, что $c - dq_{Et} = a + bq_{Et} + t$, а отсюда:

$$q_{Et} = \frac{c-a-t}{b+d} = q_E - \frac{t}{b+d}; \quad p_{Et} = \frac{cb+ad+dt}{b+d} = p_E + \frac{dt}{b+d}.$$

Следовательно, функция, выражающая общий объем налога, который может быть собран на данном рынке, имеет вид $T = tq_{Et} = tq_E - \frac{t^2}{b+d}$, а график этой функции на интервале $(0; q_E(b + d))$ называется кривой Лэффера (рисунок 1.2.2).

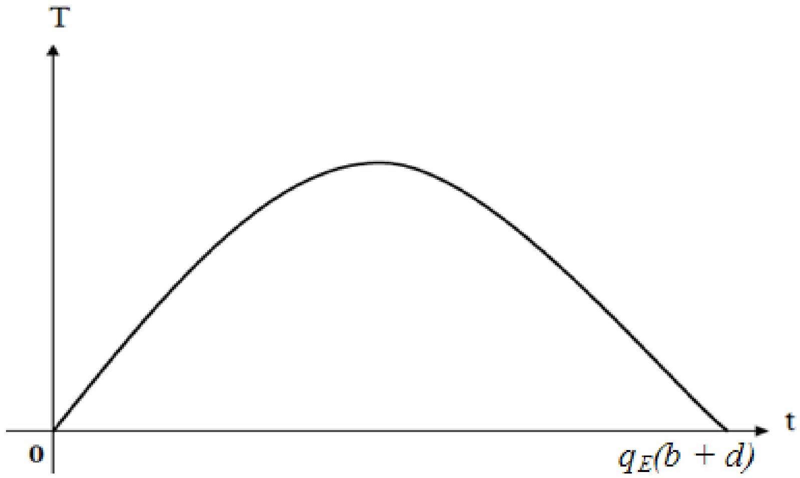


Рисунок 1.2.2 - Кривая Лэффера.

Фактически, та же картина имеет место, когда в качестве налога взимается определенный процент от цены товара.

Это в теории. На практике, особенно в странах с переходной экономикой, где налогоплательщики не являются законопослушными, скорее всего кривая Лэффера будет расположена ниже, особенно при больших величинах налога t_a.

В Кыргызстане, одним из краеугольных камней проводящейся налоговой реформы является следующее утверждение: налоговое бремя слишком велико, экономика находится на убывающем участке кривой Лэффера, поэтому, снизив ставку налога можно увеличить объем собираемого налога. При этом, очень часто ссылаются на Россию, где после снижения ставки налога объем собираемого налога увеличился. Однако часть экономистов утверждает, что этот пример не является корректным — сбор налогов увеличился не в результате снижения ставки налогообложения, а в результате совпавшего по времени, увеличения цен на энергоносители на мировом рынке, где Россия, как всем известно, является одним из крупнейших поставщиков.

По нашему мнению, ситуацию со сбором налогов в Кыргызской Республике невозможно улучшить, используя только снижение ставки налогообложения еще и потому, что кривая Лэффера на практике должна выглядеть по-разному при повышении и понижении ставок. При повышении ставок, большая часть налогоплательщиков будет продолжать платить налоги в каком-то смысле по инерции, до тех пор, пока это в какой-то степени разумно. Но при движении в обратную сторону, те, кто уже нашел способы уклониться от уплаты налогов, не будут гореть желанием начинать их платить. Они уже имеют дурную привычку, а от них трудно избавиться или избавить. Все знают, что начать курить достаточно просто, но бросить … !

Поэтому, на наш взгляд, «кривая Лэффера» на практике состоит из двух частей, верхняя соответствует ситуации с увеличением налогов, нижняя – уменьшению (рисунок 1.2.3).

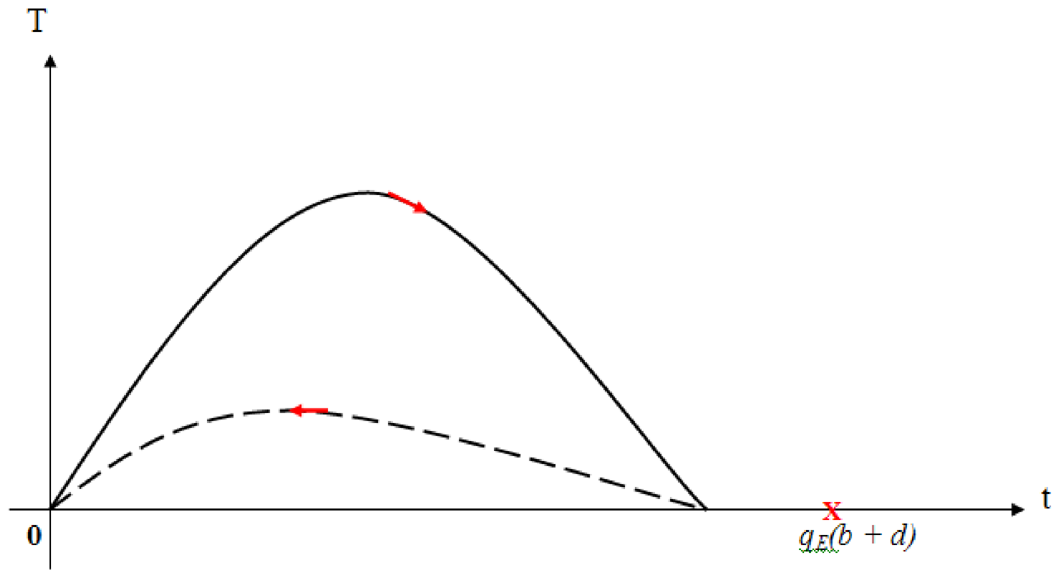


Рисунок 1.2.3 - Модифицированная кривая Лэффера.

Причем, при увеличении ставки налогообложения, объем собираемых налогов будет меньше теоретического за счет уклонения от налогов (то есть налоги полностью перестанут платить еще до того, как величина акцизного налога станет равной $q_E(b + d)$).

Из обсуждения кривой Лэффера следует, что налог на единицу товара приводит к увеличению рыночной цены и уменьшению объема продаж на рынке.

К этому же выводу можно прийти, используя маржинальный подход.:

Фирма будет производить и продавать товар до тех пор, пока доход от последней проданной единицы товара будет не меньше затрат на получение этой единицы товара $MR \geq MC$. В случае, когда вводится акцизный налог размером t_a условие $MR \geq MC$ трансформируется в условие $MR - t_a \geq MC$, а в случае, когда налог t_a есть часть цены — в условие $(1 - t)MR \geq MC$.

В обоих случаях, для того чтобы неравенство имело место, требуется большее, чем в условии $MR \geq MC$, значение MR, а это, в силу убывания функции спроса, имеет место при меньших значениях q.

1.2.3. Пример 2

Спрос на оливковое масло на рынке *Бруклин* задается функцией $q_d = 16 - 2p_d$, предложение - функцией $q_s = p_s - 2$.

(q – измеряется в тоннах, p – в \$ за литр.)

a) Сколько тонн оливкового масла, и по какой цене продавалось на этом рынке, в то время когда он был конкурентным?

b) Как изменились ответы, когда право покупать товар у поставщиков и продавать его потребителям на этом рынке получило одно и то же лицо: *Дон*?

c) Сколько единиц товара и по какой цене стало продаваться на рынке *Бруклин*, с того момента как полиция победила мафию, и для того чтобы содержать эту полицию государство максимизирует величину налога, который собирается путем взимания налога с каждой проданной единицы?

Решение

a) Из условий равновесия на рынке $q_d = q_s$; $p_d = p_s$, вытекает, что $16 - 2p = p - 2$. Следовательно, равновесная рыночная цена была $p = 6$, равновесный объем $q = p - 2 = 4$.

b)

Подобно многим другим одаренным предпринимателям, Вито Карлеоне рано понял, что наибольшую прибыль приносит монополия.

Марио Пьюзо «Крестный отец»

Будучи монопсонистом, покупая товар и монополистом, продавая его, Дон стремился максимизировать прибыль: разницу между выручкой от продажи оливкового масла $p_d\, q = (8 - 0{,}5q)q = 8q - 0{,}5q^2$ и затратами на приобретение масла $p_s\, q = (q + 2)q = q^2 + 2q$.

Тогда, $Pf = (8q - 0{,}5q^2) - (q^2 + 2q) = -1{,}5q^2 + 6q$.

$Pf' = -3q + 6 \Rightarrow -3q + 6 = 0 \Rightarrow q = 2;$

$p_d = 8 - 0{,}5q = 8 - 1 = 7; \quad p_s = q + 2 = 4.$

Другими словами, на этом рынке *Дон* покупал 2 тонны оливкового масла у производителей по цене $4 и продавал его потребителям по цене $6.

Эта часть примера 2 может служить наглядной иллюстрацией тезиса о вреде монополии для общества в целом: при монополизации рынка объем продаж сократился в 2 раза.

c) Из условий равновесия на рынке $q_d = q_s$; $p_d = p_s + t$, где t величина акцизного налога, вытекает, что $16 - 2(p_s + t) = p_s - 2$.

Следовательно, $3p_s = 18 - 2t$, го есть с каждой проданной на этом рынке единицы товара продавец будет получать $p_s = 6 - 2t/3$ евро, а на этом рынке будет продаваться $q = p - 2 = 4 - 2t/3$ тонн оливкового масла.

Для того чтобы определить величину t воспользуемся условием максимизации совокупного налога: $T = tq = t(4 - 2t/3) = 4t - 2t^2/3$.

$T' = 4 - 4t/3 \Rightarrow 4 - 4t/3 = 0 \Rightarrow t = 3.$

И так, с каждой проданной на этом рынке единицы товара продавец будет получать $p_s = 6 - 2t/3 = 6 - 6/3 = 4$ евро, покупатель будет платить

$p_d = p_s + t = 4 + 3 = 7$ евро, а на рынке будет продаваться $q = p - 2 = 4 - 2t/3 = 2$ тонны оливкового масла.

Сравнивая пункты b) и c) получаем удивительный результат: победа государственного аппарата над мафией не принесла никакой пользы, как для потребителей оливкового масла, так и для его поставщиков. Надеемся, что все видят причину парадокса — акцизный налог.

Возникает вопрос, как же быть государству, если оно желает увеличивать ВВП, а налоги, как сказано выше, уменьшают объем продаж на рынке? Ведь без налогов не обойтись.

К счастью, существуют налоги, которые не влияют на цену и объем продаж на рынке.

Один из них, это налог на прибыль. Он является основным налогом в США, и, по нашему мнению, это одна из главных причин, которые сделали экономику США самой сильной в мире. В этом случае, условие (1) запишется в виде
$(1 - t)(MR - MC) \geq 0$, а это неравенство имеет такое же решение, что и неравенство $MR \geq MC$.

Однако, на практике, в условиях Кыргызстана, очень сложно определить истинный объем прибыли, который получает та или иная фирма. Известно, например, что фирма, снабжавшая бензином авиабазу Ганси в своих годовых отчетах за 2004 год, показала столь маленькую прибыль, что «очень хочется пожалеть» ее хозяев.

Считаем, что простую, разумную и действенную систему налогообложения можно построить, взяв за основу паушальный налог. Возможно, не все знакомы с этим словом, но все знают этот налог – это налог в виде патента на предпринимательскую деятельность. Не нужно стоять за спиной парикмахера и считать, сколько человек он постриг. Он должен заплатить только за право заниматься этой деятельностью, что можно связать с помещением, в котором он работает.

Если завод, который в текущем году со скрипом заплатил какое-то количество налогов, на будущий год купит патент, стоимость которого больше, чем текущие налоги и произведет продукции во много раз больше, чем сейчас, то от этого общество только выиграет.

1.2.4. Далее, для того чтобы теоретически доказать преимущество единовременного (паушального) налога перед акцизным налогом, рассмотрим следующий пример.

Пример 3

Функция общих издержек фирмы имеет вид $TC = 30000 + 50q$, обратная функция спроса на ее продукцию $p = 100 - 0,01q$. Здесь q – количество, p – цена.

Определить:

а) цену, при которой фирма получит максимальную прибыль, и размер этой прибыли.

б) цену и прибыль, если фирма должна будет платить налог в размере 10 сомов с каждой реализованной единицы товара;

в) цену и прибыль, если фирма должна будет заплатить единовременный налог в размере 22500 сомов;

г) цену и прибыль, если фирма должна будет заплатить единовременный налог в размере 33000 сомов;

д) цену и прибыль, если фирма должна будет заплатить налог в размере 10% от прибыли.

Решение

а) Функция прибыли фирмы при отсутствии налогов

$Pf = R - TC = pq - TC =$ *(R - выручка, TC - общие издержки)*

$= (100 - 0{,}01q)q - (30000 + 50q) = -0{,}01q^2 + 50q - 30000.$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, получим, что для того чтобы получить максимальную прибыль фирма должна произвести и продать 2500 единиц товара: $Pf' = -0{,}02q + 50 \Rightarrow -0{,}02q + 50 = 0 \Rightarrow q = 2500.$

При этом цена единицы товара $p = 100 - 0{,}01 \cdot 2500 = 75$, а величина прибыли $Pf = 75 \cdot 2500 - (30000 + 50 \cdot 2500) = 32500.$

б) Функция прибыли фирмы, если фирма должна будет платить налог в размере 10 сомов с каждой реализованной единицы товара

$Pf = R - TC - T_a = pq - TC - 10q = -0{,}01q^2 + 40q - 30000$

(T_a *– общая величина* налога).

Поэтому, $Pf' = -0{,}02q + 40 \Rightarrow -0{,}02q + 40 = 0 \Rightarrow q = 2000.$

Мы видим, что введение налога 10 сомов с каждой реализованной единицы товара привело к сокращению объема продаж и ($p = 100 - 0{,}01 \cdot 2000 = 80$) повышению цены.

Прибыль фирмы будет равна

$Pf = 80 \cdot 2000 - (30000 + 50 \cdot 2000) - 10 \cdot 2000 = 10000,$

а общая величина собранного налога $10 \cdot 2000 = 20000.$

Обратим внимание на то, что сумма двух последних чисел, прибыли фирмы и общей величины собранного налога, 30000 сомов, меньше, чем величина прибыли фирмы при отсутствии налога, 32500 сомов.

Разница, 2500 сомов, объясняется сокращением объема продаж, и в экономической теории называется потерей мертвого груза.

Итак, мы видим полностью негативное последствие акцизного налога на экономику: объем продаж сократился, цена выросла, прибыль фирмы упала, причем потери фирмы для общества не компенсируются в полной мере увеличением налоговых сборов государства. Можно предположить, что дело в неудачно выбранном размере акцизного налога. Оказывается дело не в этом, а в самой природе этого налога. Для того чтобы продемонстрировать это, повторим рассуждения пункта б), взяв вместо налога 10 сомов число t – общую ситуацию.

Записав функцию зависимости налога от объема продаж

$T_a = t_a q = t_a (2500 - 50 t_a)$, можно найти величину акцизного налога, который максимизирует общий объем собираемого налога:

$$T_a' = 2500 - 100t_a \Rightarrow 2500 - 100t_a = 0 \Rightarrow t_a = 25.$$

При этом цена на рынке *87,5* сомов, объем продаж *1250*, общий объем собираемого налога *31250* сомов, прибыль фирмы *(-14375)* сомов.

в) Функция прибыли фирмы, если фирма должна будет заплатить единовременный налог в размере 22500 сомов:

$$Pf = R - TC - T_p = pq - TC - 22500 = (100 - 0{,}01q)q - (30000 + 50q) - 22500 =$$

$$= -0{,}01q^2 + 50q - 52500 \quad (R \text{ - выручка, } TC \text{ - общие издержки}).$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, увидим, что, как и в пункте а), фирма получает максимальную прибыль, производя 2500 единиц товара и продавая его по цене 75:

$$Pf' = -0{,}02q + 50 \Rightarrow -0{,}02q + 50 = 0 \Rightarrow q = 2500; \quad p = 100 - 0{,}01 \cdot 2500 = 75.$$

При этом величина прибыли $Pf = 10000$.

Сравнивая результаты пунктов б) и в) убеждаемся в однозначном преимуществе единовременного налога над акцизным.

Он выгоден

1. Государству, так как вместо 20000 сомов в случае акцизного налога получает 22500 сомов.

2. Потребителям, так как в случае единовременного налога цена 75 сомов, а не 80 сомов.

3. Фирме, так как она при одинаковом размере прибыли занимает больший сегмент рынка.

Также, что очень важно, единовременный налог гораздо проще собрать, чем акцизный.

г) Выкладки, приведенные выше, показывают, что единовременный налог с точки зрения здравого смысла лучше акцизного. Главное, соблюдать умеренность при определении величины единовременного налога.

Повторив выкладки: $Pf = R - TC - T_p = pq - TC - T_p =$
$(100 - 0{,}01q)q - (30000 + 50q) - T_p = -0{,}01q^2 + 50q - 30000 - T_p$
(R - выручка, TC - общие издержки, T_p *– единовременный налог),* легко увидеть, что, при такой форме налогообложения, цена и объем продаж, при которых фирма максимизирует прибыль не зависят от величины T_p.

Меняться будет только прибыль: $Pf = 32500 - T_p$.

Например, если T_p в условиях нашей задачи будет равна 33000, то
$Pf = 32500 - T_p = 32500 - 33000 = -500$ сомов.

д) Этот пункт мы включили, для того чтобы проиллюстрировать вышеприведенные утверждения, касающиеся налога с прибыли.

Функция прибыль фирмы, если фирма должна будет заплатить налог 10% от прибыли:

$$(1 - 0{,}10)Pf = (1 - 0{,}10)(R - TC) = (1 - 0{,}10)[pq - TC] =$$
$$= (1 - 0{,}10)[(100 - 0{,}01q)q - (30000 + 50q)] = (1 - 0{,}10)[-0{,}01q^2 + 50q - 30000].$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, увидим, что, как и в пунктах а) и в), фирма получает максимальную прибыль производя 2500 единиц товара и продавая его по цене 75 сомов.

При этом величина прибыли $Pf = (1 - 0{,}10)32500 = 29250$.

Естественным образом возникает вопрос – А как определить величину единовременного налога на практике? Ведь там трудно определить функцию спроса, зачастую и с функцией издержек возникают проблемы. — На наш взгляд проблема решается очень просто, если опираться на имеющие материалы.

Например, представьте себе, что имеются 3 примерно одинаковые автостоянки, которые платят налог с выручки. Конечно, при этом владельцы изо всех сил пытаются скрыть истинные размеры этой выручки, а налоговая служба прилагает героические усилия, для того чтобы их разоблачить и оштрафовать. При этом 1-я автостоянка за прошлый год за месяц, в среднем, заплатила 2000 сомов, 2-я – 5000 сомов, 3-я – 3500 сомов.

В дальнейшем, при переходе к единовременной форме налогообложения, определим среднее арифметическое:

$$(2000 + 5000 + 3500)/3 = 3500 \text{ сомов},$$

увеличиваем это число на 20% и объявляем, что отныне каждая автостоянка в этом году ежемесячно будет платить налог в размере 4200 сомов, в каждый будущий год налог будет на 5% больше. При этом государственные органы никаких проверок связанных с налогами проводить не будут. Увеличение средней на 20% в 1-й год объясняем наличием скрытой выручки, 5% в дальнейшем инфляцией. Конечно же, эти числа, 20% и 5% , взяты условно, конкретизировать их должны соответствующие государственные органы. При определении налога с автостоянок, которые отличаются от стандартных, по месторасположению и размерам, должны применяться соответствующие коэффициенты. Очень важный момент, в целях борьбы с коррупцией, ставки единовременного налога для всех фирм, предприятий, … должны быть известны всем. Уверенны, что большинство владельцев таких автостоянок будут за такой налог.

Отметим, что кроме очень простого администрирования, по сравнению с налогом на прибыль, паушальный налог обладает еще одним важным для развивающейся экономики свойством — он в большей степени поощряет стремление фирм к снижению издержек и увеличению объема производства.

Как в случае, когда фирма обязана платить налог в размере 3250 сомов, так и в случае, когда она платит налог в размере 10% от прибыли, она производит и продает 2500 единиц товара по цене 75 сомов, и имеет прибыль 29250 сомов.

Теперь представьте, что в результате усовершенствования технологии производства, фирме удалось снизить переменные издержки и функция издержек теперь вместо $TC = 30000 + 50q$, выглядит так: $TC_1 = 30000 + 40q$.

Тогда, в случае паушального налога 3250:

$$Pf = R - TC_1 - 3250 = pq - TC_1 - 3250 = (100 - 0{,}01q)q - (30000 + 40q) - 3250 =$$

$$= -0{,}01q^2 + 60q - 33250 \quad (R \text{ - выручка, } TC \text{ - общие издержки}).$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, увидим, что, максимальную прибыль фирма получит, производя 3000 единиц товара и продавая его по цене 70 сомов:

$$Pf' = -0{,}02q + 60 \Rightarrow -0{,}02q + 60 = 0 \Rightarrow q = 3000.$$

$p = 100 - 0{,}01 \cdot 3000 = 70$ сомов.

При этом величина прибыли

$Pf = 70 \cdot 3000 - (30000 + 400 \cdot 3000) - 3250 = 56750$ сомов.

В случае 10%-ного налога на прибыль:

$$Pf = (1 - 0{,}10)[R - TC_1] = (1 - 0{,}10)[pq - TC_1] =$$

$$= (1 - 0{,}10)[(100 - 0{,}01q)q - (30000 + 40q)] = (1 - 0{,}10)[-0{,}01q^2 + 60q - 30000].$$

Приравняв к нулю производную, увидим, что, так как множитель $(1 - 0{,}10)$ не влияет на результат, фирма получит максимальную прибыль, производя 3000 единиц товара и продавая его по цене 70 сомов.

При этом величина прибыли

$Pf = (1-0{,}10)[70 \cdot 3000 - (30000 + 4000 \cdot 3000)] = 0{,}9 \cdot 60000 = 54000$ сомов.

Приведенный пример показывает, что в случае паушального налога снижению издержек приводит к большему увеличению прибыли, чем в случае налога на прибыль.

1.2.5. Пример 4

На некотором рынке спрос на товар задан функцией $p = 300 - 1{,}5q$, функция издержек фирмы имеет вид $TC = 5000 + 90q$.

Определить:

а) цену, при которой фирма получит максимальную прибыль, и размер этой прибыли;

б) цену и прибыль, если имеет место налог на добавленную стоимость (НДС) 20%;

в) величину акцизного налога, при которой будет собран налог соответствующий 20% НДС;

г) цену и прибыль, если имеет место паушальный налог, равный налоговой выручке при НДС 20%;

д) ставку налога на прибыль, при которой будет собран налог соответствующий 20% НДС.

Решение

а) Функция прибыли фирмы при отсутствии налогов

$Pf = R - TC = pq - TC = (300 - 1,5q)q - (5000 + 90q) =$

$= -1,5q^2 + 210q - 5000$ (*R - выручка, TC - общие издержки*).

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, получим, что для того чтобы получить максимальную прибыль фирма должна произвести и продать 70 единиц товара: $Pf' = -3q + 210 \Rightarrow -3q + 210 = 0 \Rightarrow q = 70$.

При этом цена единицы товара $p = 300 - 1,5 \cdot 70 = 195$, а величина прибыли $Pf = 195 \cdot 70 - (5000 + 90 \cdot 70) = 2350$.

б) Если имеет место налог на добавленную стоимость (НДС) 20%, то фирма производящая этот товар воспринимает спрос как функцию

$$p = \frac{1}{1 + 0,20}(300 - 1,5q) = 250 - 1,25q.$$

Повторив выкладки, приведенные в предыдущем пункте с функцией спроса $p = 250 - 1,25q$, увидим, что 20%-ный НДС уменьшает объем производства до 64 единиц и повышает цену до 204.

Из этих денег фирме достается: $204/(1 + 0,2) = 170$. Поэтому, фирма заработает $170 \cdot 64 = 10880$, истратив $TC(64) = 5000 + 90 \cdot 64 = 10760$.

Соответственно, прибыль будет равна 120.

Государство получит НДС в размере $34 \cdot 64 = 2176$.

Вспомнив о том, что в ситуации, когда отсутствовал налог, прибыль была равна 2350, увидим, что потери общества, связанные с введением НДС равны $2350 - (120 + 2176) = 54$.

в) Для того чтобы собрать налог величиной *2176* (соответствующий 20% НДС), надо ввести акцизный налог величиной *a*, где *a* находится из условия $\begin{cases} aq = 2176, \\ 300 - 3q = 90 + a. \end{cases}$ 2-ое уравнение есть условие максимизации прибыли при введении акцизного налога величиной *a,* которое означает равенство предельной выручки и предельных издержек.

Выразим *a* из 2-го уравнения и подставим в 1-ое: $\begin{cases} (210 - q)q = 2176, \\ 210 - 3q = a \end{cases}$. Полученное уравнение эквивалентно уравнению $3q^2 - 210q + 2176 = 0$. Его корни $q = 57{,}35$ и $q = 12{,}65$ определяют объемы производства, которые при уровнях акцизного налога $a = 2176/57{,}35 = 37{,}94$ и $a = 2176/12{,}65 = 172{,}06$ дают искомый объем налога. Так как они меньше, чем *64* – объем производства при 20%-ном НДС, соответствующие цены больше.

Не нужно удивляться тому, что получилось два ответа — это следует из вида кривой Лэффера.

В условиях этого примера НДС лучше, чем акциз, так как позволяет государству получить тот же объем налога при большем объеме продаж и соответственно, при более низкой цене.

г) Функция прибыли фирмы при паушальном налоге *2176*:

$$Pf = R - TC - 2176 = pq - TC - 2176 = (300 - 1{,}5q)q - (5000 + 90q) - 2176 =$$

$$= -1{,}5q^2 + 210q - 7176 \quad (R \text{ - выручка, } TC \text{ - общие издержки}).$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, получим, что для того чтобы получить максимальную прибыль фирма должна произвести и продать 70 единиц товара: $Pf' = -3q + 210 \Rightarrow -3q + 210 = 0 \Rightarrow q = 70$.

При этом цена единицы товара $p = 300 - 1{,}5 \cdot 70 = 195$, а величина прибыли $Pf = 195 \cdot 70 - (5000 + 90 \cdot 70) - 2176 = 174$.

д) Так как прибыль фирмы при отсутствии налогов равна 2350, а налоговая выручка, соответствующая 20% НДС равна 2176, то ставка налога на прибыль равна $\frac{2176}{2350} \cdot 100\% = 92{,}6\%$.

Еще раз подчеркнем, что паушальный налог и налог на прибыль, не меняют объем продаж и рыночную цену, а также не приводят к потерям для общества в целом. Они заведомо лучше, чем акцизный налог и НДС.

К сожалению, при всех своих теоретических достоинствах, налог на прибыль на практике имеет большой недостаток — он предусматривает большое количество непосредственных контактов между налоговыми органами и налогоплательщиками. А в условиях Кыргызстана это является питательной почвой для коррупции.

Завершим этот параграф цитированием одного из самых известных экономистов. Надеемся, что Вы увидите в концентрированном виде многое из того, о чем говорилось выше.

А. Смит в работе «Исследование о природе и причинах богатства народов»[1] основал систему базовых принципов налогообложения, которая не утратила актуальности до настоящего времени, и которая является основой для расширения и уточнения принципов налогообложения в контексте различных видов налогов.

Базовые принципы налогообложения в изложении А. Смита касаются следующего:

«I. Подданные государства должны по возможности соответственно своей способности и силам участвовать в содержании правительства, т. е. соответственно доходу, каким они пользуются под покровительством и защитой государства.

II. Налог, который обязывается уплачивать каждое отдельное лицо, должен быть точно определен, а не произволен. Срок уплаты, способ платежа, сумма платежа — все это должно быть ясно и определенно для плательщика и для всякого другого лица. … Точная определенность того, что каждое отдельное лицо обязано платить, в вопросе налогового обложения представляется делом столь

[1]Книга V «О доходах государя или государства», глава II «Об источниках общего или государственного дохода общества», отдел II «О налогах».

большого значения, что весьма значительная степень неравномерности, как это, по моему мнению, явствует из опыта всех народов, составляет гораздо меньшее зло, чем весьма малая степень неопределенности.

III. Каждый налог должен взиматься в то время или тем способом, когда и как плательщику должно быть удобнее всего платить его.

IV. Каждый налог должен быть так задуман и разработан, чтобы он брал и удерживал из карманов народа возможно меньше сверх того, что он приносит казначейству государства. Налог может брать или удерживать из карманов народа гораздо больше, чем он приносит казначейству четырьмя следующими путями: во-первых, собирание его может требовать большого числа чиновников, жалованье которых может поглощать большую часть той суммы, какую приносит налог, и вымогательства которых могут обременить народ добавочным налогом; во-вторых, он может затруднять приложение труда населения и препятствовать ему заниматься теми промыслами, которые могут давать средства к существованию и работу большому множеству людей. Обязывая людей платить, он может этим уменьшать или даже уничтожать фонды, которые дали бы им возможность с большей легкостью делать эти платежи. В-третьих, конфискациями и другими наказаниями, которым подвергаются несчастные люди, пытающиеся уклониться от уплаты налога, он может часто разорять их и таким образом уничтожать ту выгоду, которую общество могло бы получать от приложения их капиталов. … В-четвертых, подвергая людей частым посещениям и неприятным расспросам сборщиков налогов, он может причинять им много лишних волнений, неприятностей и притеснений; и, хотя неприятности, строго говоря, не представляют собою расхода, однако они, без сомнения, эквивалентны расходу, ценой которого каждый человек готов избавить себя от них.

Очевидная справедливость и польза этих положений обращали на себя большее или меньшее внимание всех народов. Все народы старались по силе своего разумения сделать свои налоги настолько равномерными, как только могли, настолько определенными, чтобы это было удобно плательщику как в отношении срока и способа уплаты, так и в отношении доли его дохода, которую он отдавал государю, сделать их возможно менее отяготительными для народа» [26, с. 588].

Говоря современным языком, А. Смит сформулировал следующие принципы налогообложения:

справедливости – налогом должны облагаться все налогоплательщики, а размер налога – дифференцироваться, в соответствии с получаемыми выгодами;

определенности – время и способ уплаты налога, а также размер налога должны быть фиксированными, о чем все участники процесса налогообложения должны быть оповещены заранее;

удобства – все процедуры взимания налога должны быть безбарьерными, т.е. удобными для налогоплательщиков;

эффективности – средства, затрачиваемые государством на администрирование налога, должны быть не просто минимально возможными, а существенно меньше, чем собираемый налог.

§1.3. Количественная оценка внешнего воздействия на спрос и предложение

Закон спроса говорит, что между ценой на товар и количеством товара, которое желают и могут купить по этой цене, при прочих равных условиях, существует обратная зависимость.

В то же время, закон предложения утверждает, что между объемом предлагаемого к продаже товара и ценой существует прямая зависимость.

Точкой рыночного равновесия называется точка, в которой совпадают интересы покупателей и продавцов. Координатами этой точки, являются цена товара, по которой совершается рыночная сделка и количество товара, которое при этой сделке переходит из рук в руки [27 - 29].

В этом параграфе будет показано, как можно провести количественный анализ различных видов воздействия на работу модели спрос-предложение.

1.3.1. <u>Пример 1</u>

При цене 5 сом за килограмм фермерское хозяйство готово продать 2 тонны картофеля, при цене 9 сом/кг – 5 тонн. Торговая фирма при цене 16 сома за килограмм готова купить 1,5 тонны картофеля, при цене 12 сома – 2,5 тонны. Предполагая линейные зависимости, определите:

а) Сколько тонн картофеля готовы продать фермеры при цене 11 сом/кг?

б) Сколько тонн картофеля готова купить фирма при цене 8 сом/кг?

в) При какой цене и каком количестве заключат соглашение фермеры и фирма?

г) Чему будут равны равновесная цена и равновесный объем продаж, если введен акцизный налог, размером 1,8 сом/кг.

д) Чему будут равны равновесная цена и равновесный объем продаж, если введен налог, размером 20 % цены.

е) Чему будут равны равновесная цена и равновесный объем продаж, если за каждый проданный кг картофеля фермеры получают дополнительно 1 сом из госбюджета.

ж) Предположим, что правительство запретило продавать картофель дороже, чем за 6,8 сом/кг. Проанализируйте ситуацию, которая будет иметь место вследствие этого решения правительства.

з) В условиях пункта ж, дополнительно предположите, что введен акцизный налог, размером 0,8 сом/кг.

Решение

Линейное соотношение между количеством и ценой в общем виде можно записать в виде $q = ap + b$. Подставив имеющиеся данные, получим функцию предложения и функцию спроса.

а) Начнем с функции предложения: $\begin{cases} 2 = a\cdot 5 + b, \\ 5 = a\cdot 9 + b. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое и получим $3 = a4$.

Отсюда $a = 0,75$. Подставив найденное значение в любое из уравнений системы, получим $b = -1,75$. Как результат, имеем уравнение предложения картофеля:

$q_s = 0,75p_s - 1,75$. Отсюда получаем, что при цене $p = 11$ сом/кг будет предложено $q = 6,5$ тонн картофеля.

б) Функцию спроса получим так же, как и функцию предложения: $\begin{cases} 1,5 = a\cdot 16 + b, \\ 2,5 = a\cdot 12 + b. \end{cases}$ Решив эту систему, получим уравнение спроса: $q_D = -0,25p_D + 5,5$.

Следовательно, при цене 8 сом за килограмм объем спроса составит 3,5 тонн.

в) Для того, чтобы найти координаты точки рыночного равновесия воспользуемся условием рыночного равновесия. В данной ситуации обе стороны будут довольны, если при одной и той же цене объем предложения будет равен объему спроса: $\begin{cases} p_D = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$. Обозначив координаты точки рыночного равновесия через (p_E; q_E), получим систему $\begin{cases} q_E = -0,25p_E + 5,5, \\ q_E = 0,75p_E - 1,75. \end{cases}$

Решением системы являются координаты точки пересечения кривых спроса и предложения: равновесная цена 7,25 сома за килограмм и равновесный объем 3,6875 тонн.

г) Сразу ответим тем, кто будет говорить, что продажи картофеля акцизным налогом не облагаются. Пример 1 рассматривается, как некая модель, на которой можно отследить реакцию рынка на различные воздействия. А если писать пример, непосредственно связанный с акцизным налогом, то картофель можно поменять на водку или сигареты.

В условиях пункта г) рыночное равновесие будет иметь место, если $\begin{cases} p_D = p_S + 1,8, \\ q_D = q_S \end{cases}$. (1-ое уравнение указывает на то, что деньги, выплачиваемые покупателем, получат как продавец, так и государство.) Тогда, координаты точки рыночного равновесия получим, решив систему $\begin{cases} q_E = -0,25\cdot p_D + 5,5, \\ q_E = 0,75\cdot(p_D - 1,8) - 1,75. \end{cases}$

Отсюда получим, что если введен акцизный налог, размером 1,8 сом/кг, то за каждый кг покупатель отдаст 8,6 сомов, из них продавец получит 6,8 сомов. Всего будет продано 3,35 тонн картофеля.

Ответы на вопросы, поставленные в пунктах д и е будут получены по той же схеме, что и в пунктах в и г: определим условие рыночного равновесия и исходя из него, получим систему для определения координат точки рыночного равновесия.

д) Условие рыночного равновесия: $\begin{cases} 0,8p_D = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} q_E = -0,25p_D + 5,5, \\ q_E = 0,75 \cdot 0,8p_D - 1,75. \end{cases}$

Следовательно, если введен налог, размером 20% цены за каждый кг покупатель отдаст 8,53 сомов, из них продавец получит 6,8 сомов. Всего будет продано 3,37 тонн картофеля.

е) Условие рыночного равновесия: $\begin{cases} p_D + 1 = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} q_E = -0,25p_D + 5,5, \\ q_E = 0,75(p_D + 1) - 1,75. \end{cases}$

Следовательно, если за каждый проданный кг картофеля фермеры получают дополнительно 1 сом из госбюджета за каждый кг покупатель отдаст 6,5 сомов, продавец получит 7,5 сомов. Всего будет продано 3,875 тонн картофеля.

ж) Если правительство запретит продавать картофель дороже, чем за 6,8 сом/кг, то (см. пункт в) рыночная цена установится на этой отметке. По цене 6,8 сом/кг фермеры готовы отдать $q_s(6,8) = 0,75 \cdot 6,8 - 1,75 = 3,35$, а покупатели готовы купить $q_D(6,8) = -0,25 \cdot 6,8 + 5,5 = 3,8$.

Поэтому, будет иметь место дефицит товара: $3,8 - 3,35 = 0,45$ тонн, а наличие дефицита подталкивает к образованию черного рынка.

з) Из-за введения акцизного налога, фермеры будут получать только 6 сомов за каждый проданный килограмм картофеля. Поэтому, они будут предлагать только $q_s(6) = 0,75 \cdot 6 - 1,75 = 2,75$ тонн, а покупатели по-прежнему готовы купить $q_D(6,8) = -0,25 \cdot 6,8 + 5,5 = 3,8$.

Поэтому, величина дефицита будет: $3,8 - 2,75 = 1,05$ тонн .

1.3.2. Пример 2

На рынке неквалифицированной рабочей силы спрос на труд задается функцией $L_D = -2w_D + 15$, *функция предложения* $L_S = 3w_S - 10$, *где L – количество труда в миллионах часов, w - ставка заработной платы в \$. Определим равновесную точку.*

Так как при равновесной ставке заработной платы объем спроса на труд совпадает с объем предложения, имеет место система

$\begin{cases} L_E = -2 \cdot w_E + 15, \\ L_E = 3 \cdot w_E - 10 \end{cases}$, и ее решение $L_E = 5$; $w_E = \$5$.

А теперь предположим, что правительство принимает закон о минимуме заработной платы, по которому час труда должен стоить не менее $6.

Тогда, на рынке труда будет предложено $L_S(6) = 3 \cdot 6 - 10 = 8$, а спрос будет предъявлен только на $L_D(6) = -2 \cdot 6 + 15 = 3$ миллиона часов труда. Следовательно, в данной ситуации принятие закона о минимуме заработной платы приводит к повышению уровня безработицы, ну и к появлению черного рынка труда.

1.3.3. Пример 3

На внутреннем рынке малой страны А, функция спроса на товар $q_D = 23 - 1{,}6p_D$, *функция предложения* $q_S = 2{,}4p_S - 1$. *Мировая цена этого товара $7.*

а) Какой будет цена товара в условиях закрытой экономики?

б) Каким будет объем экспорта при открытых экономических границах?

в) Как изменится ответ, если с каждой единицы экспортируемого товара будет взиматься пошлина $0,5?

Решение

а) В условиях закрытой экономики $\begin{cases} p_D = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$.

Поэтому $\begin{cases} q_E = -1{,}6p_E + 23, \\ q_E = 2{,}4p_E - 1. \end{cases}$ Следовательно, $p_E = 6$.

б) Рынок малой страны практически не влияет на цены мирового. Поэтому, при открытых экономических границах цена товара будет равна $7.

Объем спроса при этой цене $q_D(7) = 23 - 1{,}6 \cdot 7 = 11{,}8$; объем предложения $q_S(7) = 2{,}4 \cdot 7 - 1 = 15{,}8$. Соответственно, объем экспорта будет равен $15{,}8 - 11{,}8 = 4$.

в) Если с каждой единицы экспортируемого товара будет взиматься пошлина $0,5, то производители страны А с каждой единицы товара поставленной на экспорт будут получать по $6,5. следовательно, и на внутреннем рынке цена будет равна $6,5. Соответственно, в этих условиях, объем экспорта равен $q_S(6{,}5) - q_D(6{,}5) = 14{,}6 - 12{,}6 = 2$.

1.3.4. Пример 4

На внутреннем рынке малой страны В, спрос на товар на отрезке [0; 12,5] задается функцией $p_D = 1,2(q_D)^2 - 30q_D + 180$, *предложение — функцией* $p_S = 8q_S + 20$. *Мировая цена этого товара $43,2.*

а) Какой будет цена товара в условиях закрытой экономики?

б) Каким будет объем импорта при открытых экономических границах?

в) Какой будет цена на внутреннем рынке, если будет введена квота – будет разрешено ввозить до 1,5875 единиц товара?

Решение

а) В условиях закрытой экономики $\begin{cases} p_D = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$.

Поэтому, $\begin{cases} p_E = 1,2(q_E)^2 - 30q_E + 180, \\ p_E = 8q_E + 20. \end{cases}$

Так как равны левые части уравнений системы должны быть равны и правые. Тогда, $1,2(q_E)^2 - 30q_E + 180 = 8q_E + 20$. Следовательно, $1,2(q_E)^2 - 38q_E + 160 = 0$. Решение этого уравнения $q_E = 5$. (Второй корень квадратного уравнения не принадлежит области определения.) Тогда, цена товара в условиях закрытой экономики $p_E(5) = 8\cdot5 + 20 = 60$.

б) Количество товара, которое при цене $43,2 производители страны ***В*** поставят на рынок определяется уравнением $43,2 = 8q_S + 20$.

То есть $q_S(43,2) = 2,9$ единиц.

Количество товара, потребляемое при цене $43,2, определяется уравнением $43,2 = 1,2(q_D)^2 - 30q_D + 180$. Решение этого уравнения $q_D(43,2) = 6$.

Поэтому объем импорта при цене товара $43,2 будет равен $q_D(43,2) - q_S(43,2) = 6 - 2,9 = 3,1$.

в) При отсутствии квоты, как это указано в пункте б, объем импорта будет равен 3,1 единицы товара. Поэтому будет использована вся квота: 1,5875 единиц товара. Тогда, имеет место условие равновесия $p_D = p_S$; $q_D - q_S = 1,5875$.

Отсюда, $1{,}2(q_D)^2 - 30q_D + 180 = 8(q_D – 1{,}5875) + 20$. Решение этого уравнения $q_D = 5{,}5$. (Второй корень квадратного уравнения не принадлежит области определения.)

Итак, если будет введена квота — будет разрешено ввозить до 1,5875 единиц товара, на внутреннем рынке страны ***B*** будет потребляться 5,5 единиц товара, производители страны ***B*** поставят на рынок $5{,}5 – 1{,}5875 = 3{,}9125$ единиц товара, а цена на внутреннем рынке будет равна $p_S = 8 \cdot 3{,}9125 + 20 = \$51{,}3$.

1.3.5. Пример 5

Спрос на пшеницу на рынке страны Халявия задается функцией $q_D = 2600 – 100p_D$ *. В результате того, что правительство Халявии получив гуманитарную помощь в виде некоторого количества пшеницы, выбросило ее на рынок, рыночная цена пшеницы составила 10 халявок за кг, объем продаж стал равным 1600 тон.*

После этого, Аграрный Союз Халявии требует компенсации от правительства в размере 37800 тысяч халявок, обосновывая это следующими фактами: 1600 т пшеницы аграрии сумели бы продать по цене 28 халявок за кг, а так как цена была только 10 халявок за кг, они продали только 700 т. Соответственно, убытки в результате выброса гуманитарной помощи составили $28 \cdot 1600000 - 10 \cdot 700000 = 37800000$ *халявок.*

Разберемся в этой ситуации, считая, что предложение пшеницы на рынке Халявии, задается линейной функцией $q_S = e + fp_S$.

Подставив вышеприведенные значения, получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 1600 = e + f \cdot 28, \\ 700 = e + f \cdot 10 \end{cases}$ и определим коэффициенты функции предложения: $e = 200,\ f = 50$.

Отсюда, воспользовавшись условием рыночного равновесия при отсутствии внешнего вмешательства $\begin{cases} p_D = p_S, \\ q_D = q_S \end{cases}$, получим $\begin{cases} p_s = p_d = p, \\ 200 + 50p = 2600 - 100p \end{cases}$.

Решив систему, получим, что при отсутствии внешнего вмешательства равновесная цена была бы равна 16, а равновесный объем будет равен 1000 т.

Следовательно, при отсутствии внешнего вмешательства Аграрии могли бы заработать $16 \cdot 1000000$ халявок и поэтому, максимальная сумма компенсации, на которую может претендовать Аграрный Союз Халявии равна

$16 \cdot 1000\,000 - 10 \cdot 700\,000 = 15\,300\,000$.

Помимо определения размеров справедливой компенсации, на основе приведенных данных мы можем определить размер гуманитарной помощи. Обозначив ее через Q, получим, что функция предложения после выброса гуманитарной помощи на рынок будет иметь вид $q_S = 200 + 50p_S + Q$.

Подставив в это уравнение значения цены и объема в точке равновесия, получим $1600 = 200 + 50 \cdot 10 + Q$. Отсюда следует, что правительство Халявии получило гуманитарную помощь в размере *900* т пшеницы.

1.3.6. Пример 6

Некоторым царством, некоторым государством правил очень умный царь. Выяснив однажды, что спрос на электроэнергию в его царстве описывается уравнением $q_D = 190 - 0{,}8p_D$, а предложение $q_s = 2p_s - 6$, он объявил, что заботясь о благе своих подданных он запрещает продавать единицу электроэнергии дороже, чем за 80 монет.

Этим шагом, будучи очень умным, царь собирался «убить двух зайцев»: с одной стороны продемонстрировать заботу о подданных, с другой стороны не мешать рынку. Дело в том, что, обозначив координаты точки рыночного равновесия через (p_E; q_E), и решив систему $\begin{cases} q_E = 190 - 0{,}8p_E, \\ q_E = 2p_E - 6, \end{cases}$ получим, что равновесная цена 70 монет.

Однако, вскоре выяснилось, что в царстве завелись «энергомыши», которые пожирают 40% предлагаемой энергии, вследствие чего, в государстве образовался дефицит электроэнергии.

Покажем это. В результате деятельности «энергомышей» на рынок поступает только $q_{s1} = 0{,}6(2p_s - 6) = 1{,}2p_s - 3{,}6$ единиц электроэнергии.

Поэтому, рыночная цена определяется системой $\begin{cases} q_E = 190 - 0{,}8p_E, \\ q_E = 1{,}2p_E - 3{,}6, \end{cases}$ и равна 96,8 монет. А так как по велению царя, единица электроэнергии не может продаваться дороже, чем за 80 монет, то по этой цене на рынок будет поставлено $q_{s1}(80) = 1{,}2 \cdot 80 - 3{,}6 = 92{,}4$ единиц электроэнергии, а востребовано $q_D(80) = 190 - 0{,}8 \cdot 80 = 126$. И как следствие, будет иметь место дефицит $126 - 92{,}4 = 33{,}6$ единиц электроэнергии.

А как хорошо известно, даже тем, кто не изучал экономическую теорию, наличие дефицита является прекрасной питательной почвой для развития черного рынка и коррупции.

Разбор ситуации может послужить основой для обсуждения положения в энергосекторе Кыргызстана. При этом можно привести некоторые факты.

Если в обычное время каждый день страна потребляет порядка 15-18 миллионов киловатт/часов, то нам надо сейчас потреблять не более 12 миллионов киловатт/часов, то есть 30% надо сэкономить. ... В 2007 году на август приходилось 42% энергопотерь. К августу 2008 года ситуация немного улучшилась – сократили их до 36%. ... К сожалению, 30% - это 3 миллиарда киловатт/часов – просто разворованная электроэнергия. ... Что касается энергобаронов, я думаю, они богатеют и жиреют как раз за счет того, что уже сейчас по льготным ценам разворовывают электроэнергию, прячась за госпредприятия. (Эти слова принадлежат бывшему премьер-министру КР

И. Чудинову, который до этого работал министром энергетики, и произнесены во время интервью электронной газете «24.kg» в августе 2008 г.)

В связи с этими фактами странно звучат утверждения министра промышленности, энергетики и топливных ресурсов С.Балкибекова о предстоящем увеличении масштабов веерных электроотключений. (АКИpress, 16 сентября 2008). При этом он был против создания комиссии, которая бы выяснила причины критической ситуации в энергоотрасли — эту комиссию предлагал депутат Жогорку Кенеша Б. Бешимов в середине сентября 2008 во время встречи с С. Балкибековым на 5-ом телеканале.

1.3.7. Пример 7

В последнее время чиновниками высокого ранга активно обсуждается вопрос покупки электроэнергии за границей. В связи с этим предлагаем разобрать следующую ситуацию.

Пусть спрос на товар описывается уравнением $q_D = 40 - 0{,}7p_D$, а предложение $q_s = 0{,}9p_s - 2$. Тогда координаты точки рыночного равновесия $p_E = 26{,}25$; $q_E = 21{,}625$ можно найти, решив систему $\begin{cases} q_E = 40 - 0{,}7 \cdot p_E, \\ q_E = 0{,}9p_E - 2. \end{cases}$

Если на внешнем рынке купить 2,88 единиц товара и выбросить на внутренний рынок, то условие рыночного равновесия примет вид $\begin{cases} p_D = p_S, \\ q_D = q_S + 2{,}88. \end{cases}$ Тогда рыночная цена будет удовлетворять уравнению $40 - 0{,}7p = (0{,}9p_s - 2) + 2{,}88$.

Отсюда $p_E = 24{,}45$, и по этой цене будет продано 22,885 единиц товара.

Но тот же результат будет иметь место, если исходить из условия равновесия $\begin{cases} p_D + 3{,}2 = p_S, \\ q_D = q_S. \end{cases}$

Другими словами, вместо того чтобы делать покупки на внешнем рынке, можно поддержать внутреннего производителя, выделив трансферт в размере 3,2 на единицу произведенного и проданного на рынке товара.

(*Для справки*. По словам премьер-министра И. Чудинова в начале сентября 2008 года Бишкекская ТЭЦ работала на треть своей мощности.)

§1.4. Влияние изменения цены на выручку

Этот параграф в основном посвящен одному из основных понятий микроэкономики – эластичности спроса по цене (ЭСЦ). Этот коэффициент показывает, как реагирует выручка на изменение цены.

Естественным образом возникает вопрос: А что нового можно сказать об этом?

Ответ. Несмотря на то, что это достаточно простое понятие, многие трактуют его не совсем правильно.

Также, и это очень важно, по нашему мнению, коэффициент, называемый дуговой ЭСЦ является пустой, не имеющей реальной ценности величиной.

Кроме того, в данной работе, подход, использованный для анализа ЭСЦ, применен к исследованию других коэффициентов эластичности [30, 31].

1.4.1. Коэффициент ЭСЦ показывает, как реагирует выручка на изменение цены. Проблема имеет место потому, что выручка есть произведение цены товара на количество товара, а они согласно закону спроса, меняются в разных направлениях. Поэтому, при изменении цены выручка может меняться в том же направлении (в этом случае говорят, что спрос неэластичен), оставаться неизменной (это случай единичной эластичности) или же меняться в противоположном направлении (эластичный спрос). О том, что будет происходить в каждом конкретном случае, можно узнать из значения коэффициента ЭСЦ.

Ошибки в трактовке ЭСЦ возникают вследствие того, что этот коэффициент связывают с 2-мя точками на кривой спроса.

Правильная позиция: ЭСЦ должен определяться для точки (одной!) кривой спроса.

1.4.2. Эластичность спроса по цене есть коэффициент, показывающий, на сколько % изменится объем спроса в ответ на изменение цены на 1%:

$$ЭСЦ = \frac{\%\ \text{изменения объема спроса}}{\%\ \text{изменения цены}}. \qquad (1.4.1)$$

Так как цена и количество блага согласно закону спроса, меняются в разных направлениях, коэффициент ЭСЦ всегда отрицателен.

<u>Пример 1</u>

По оценке аналитиков эластичность спроса на минеральную воду СВЕЖЕСТЬ при цене 12 сомов и объеме продаж 10000 л равна (-2). Оценим объем продаж при повышении цены на 3%.

Так как коэффициент эластичности равен (–2), повышение цены на 3% приведет к уменьшению объема продаж на 6% ($-2\cdot 3\% = -6\%$). Тогда, объем продаж составит, приблизительно, $10000\cdot(1-0{,}06) = 9400$ литров воды.

<u>Замечание</u>

Очень часто, при обсуждениях, знак минус у ЭСЦ пропускают. То есть, если говорят, что ЭСЦ равно 3, то имеют в виду (–3).

Расписав относительное изменение выручки

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{(p + \Delta p)(q + \Delta q) - pq}{pq} =$$

$$= \frac{pq + p\Delta q + \Delta pq + \Delta p\Delta q - pq}{pq} = \frac{p\Delta q + \Delta pq + \Delta p\Delta q}{pq},$$

получаем, что

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta p\Delta q}{pq}.$$

В силу того, что последнее слагаемое, при малых приращениях, является очень маленьким, получается, что относительное изменение выручки, фактически, есть сумма относительных изменений цены и количества.

Следовательно, цена и выручка будут меняться в одинаковом направлении (спрос неэластичен), если относительное изменение цены (% изменения цены) будет больше относительного изменения объема спроса (% изменения объема спроса), то есть в случае, когда ЭСЦ по абсолютной величине меньше 1
($-1 < ЭСЦ < 0$).

В противном случае, то есть при эластичном спросе, ЭСЦ по абсолютной величине больше 1 ($ЭСЦ < -1$).

В пограничной ситуации $ЭСЦ = -1$. Этим объясняется название ситуации, которая имеет место в случае, когда изменение цены не меняет объем выручки — единичный спрос.

Если q_0 – количество блага продаваемого по цене p_0, q_1 - количество блага продаваемого после изменения цены от p_0 до p_1, формула (1) запишется в виде

$$ЭСЦ = \frac{(q_1 - q_0)/q_0}{(p_1 - p_0)/p_0}. \qquad (1.4.2)$$

1.4.3. Формула (1.4.2), по нашему мнению, дает ответы на все вопросы, связанные с функцией спроса в элементарной ситуации — в случае линейной функции спроса. С этим мнением не согласны авторы многих учебников по микроэкономике [32 - 34]. Для иллюстрации этой ситуации приведем отрывок из книги [32]. Он озаглавлен " Почему мы не используем формулу элементарной эластичности? " (Имеется в виду формула (1.4.2)).

*Давайте, применим формулу (*1.4.2*) к исследованию следующей проблемы: пусть цена блага падает с $10 до $9, и в результате, объем спроса растет со 100 до 120 единиц. Используя формулу (*1.4.2*) получим: 20%/(-10%) = -2.*

Теперь посмотрим на эту проблему с другой стороны: цена блага растет с $9 до $10, и в результате, объем спроса уменьшается со 120 до 100 единиц. В этом случае относительное изменение объема спроса (- 20/120) деленное на относительное изменение цены (1\9) дает (-1,5).

*Итак, мы получаем два разных значения ЭСЦ для одной и той же ситуации. Для того чтобы свести эти два значения в одно, мы используем комплексную формулу, взяв в знаменателях формулы (*1.4.2*) среднее арифметическое* q_o, q_1 *и* p_o, p_1 *вместо* q_o *и* p_o *соответственно:*

$$ЭСЦ = \frac{(q_1 - q_0)/(q_0 + q_1):2}{(p_1 - p_0)/(p_0 + p_1):2}. \qquad (1.4.3)$$

Тогда, в нашей проблеме

$$ЭСЦ = \frac{120 - 100}{(100 + 120)/2} : \frac{9 - 10}{(10 + 9)/2} = -1{,}72.$$

Это значение есть то самое значение, которое нужно использовать.

1.4.4. Отметим, что коэффициент ЭСЦ вычисленный по комплексной формуле (1.4.3) обычно называется коэффициентом дуговой эластичности.

Не соглашаясь с автором, мы утверждаем, что оба вычисленных значения ЭСЦ: и (*-2*) и (*-1,5*) являются существенными, а дуговой коэффициент *(-1,72)* практически бесполезен.

Для того чтобы подтвердить свое мнение, предположим, что (100; 10) и (120; 9) являются координатами точек на прямой, являющейся графиком линейной функции спроса, и выпишем эту функцию: $q = 300 – 20p$.

ЭСЦ для нее при цене $10 равна (-2), а при цене $9 равна (-1,5). Это означает, что в первом случае небольшое изменение цены вызовет большее изменение выручки, чем аналогичное изменение цены во втором случае.

Покажем это: функция спроса $q = 300 - 20p$ показывает, что цене \$10,1 соответствуют 98 единиц, а цене \$9,1 — 118 единиц.

Следовательно, при изменении цены от *\$10* до *\$10,1* выручка изменится с $10 \cdot 100 = \$1000$ до $10{,}1 \cdot 98 = \$989{,}8$, и при изменении цены от *\$9* до *\$9,1* выручка упадет с $9 \cdot 120 = \$1080$ до $9{,}1 \cdot 118 = \$1073{,}8$. Итак, в первом случае выручка уменьшилась на *\$10,2*, во втором *\$6,2*.

Число (-1,72), являющееся дуговой ЭСЦ показывает, что при изменении цены от \$10 до \$ 9 выручка меняется в направлении противоположном изменении цены и больше ничего. Однако, этот результат и более того, точное значение изменения выручки можно получить путем прямого вычисления.

Для того чтобы подчеркнуть бесполезность дугового коэффициента ЭСЦ, рассмотрим изменение цены от \$10 до \$4. В этом случае дуговой коэффициент ЭСЦ равен $\frac{(110 - 220)/160}{(10 - 4)/7} = -0{,}875$.

То есть, мы имеем дело с неэластичным спросом, и выручка должна меняться в том же направлении, что и цена. Но, к сожалению, этот результат относится только к одной конкретной ситуации — к уменьшению цены от \$10 до \$4. А в других случаях может иметь место и прямо противоположный результат: как мы уже видели ранее, небольшое изменение цены от \$10 ведет к изменению выручки в противоположном направлении.

1.4.5. Для того чтобы закончить рассмотрение линейной ситуации, перепишем формулу (1.4.2) в следующем виде:

$$ЭСЦ = \frac{q_1 - q_0}{p_1 - p_0} \cdot \frac{p_0}{q_0}. \qquad (1.4.4)$$

Если функция спроса записана в виде $p = k - lq$ где коэффициенты k, l – положительны, (часто в такой ситуации, когда цена выражается через количество, говорят об обратной функции спроса), тогда по формуле (1.4.4)

$$ЭСЦ = \frac{1}{-l} \cdot \frac{p_0}{q_0}. \qquad (1.4.5)$$

Добавив и отняв коэффициент k в знаменателе, и так как $p_0 = k - lq_0$, получаем что $ЭСЦ = \frac{p_0}{k - lq_0 - k} = \frac{p_0}{p_0 - k}$.

Для удобства, с учетом того, что коэффициент $k > p_0$, умножим и числитель и знаменатель на (-1):

$$ЭСЦ = \frac{-p_0}{k - p_0}. \qquad (1.4.6)$$

Итак, например, если спрос задается функцией $p = 10 - 2q$,

то при цене 5 эластичность спроса $ЭСЦ$ равна $\frac{-5}{10-5} = -1$,

а при цене 8: $ЭСЦ = \frac{-8}{10-8} = -4$.

Формула (1.4.6) удобна для анализа.

Если цена p_0 равна $k/2$, то

$ЭСЦ = \frac{-k/2}{k - k/2} = -1$ (единичная эластичность);

если же цена меньше $k/2$, то $-1 < ЭСЦ < 0$, (неэластичный спрос);

а при цене больше, чем $k/2$, $ЭСЦ < -1$ (эластичный спрос).

Далее, формула (1.4.6) позволяет избежать распространенной ошибки — отождествления коэффициента эластичности спроса и наклона линии спроса. Формула показывает, что $ЭСЦ$ для линейной функции спроса определяется только ценой, при которой вычисляется $ЭСЦ$ и значением цены, при которой величина спроса обращается в 0. Другими словами, ЭСЦ для функций спроса $p = k - l_1 q$, $p = k - l_2 q$, …, $p = k - l_n q$ при цене p_0 одна и та же (рисунок 1.4.1).

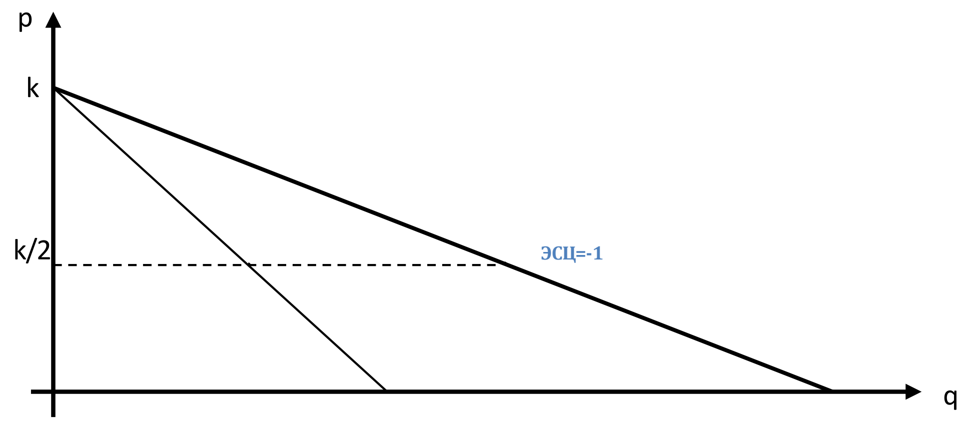


Рисунок 1.4.1 – эластичность спроса по цене
для линейных функций с разным наклоном

В то же время, формула (1.4.6) показывает, что если рассматривать точку пересечения кривых спроса, то большую эластичность имеет функция с меньшим абсолютным значением наклона, то есть более пологая прямая.

1.4.6. Повторив выкладки из предыдущего пункта для линейной функции предложения, вида $p = m + nq$, получим формулу для вычисления эластичности предложения по цене (*ЭПЦ*)

$$ЭПЦ = \frac{p_0}{p_0 - m}. \qquad (1.4.7)$$

Из этой формулы следует, что при любой цене, если:

$m = 0$, то *ЭПЦ* = 1 (единичная эластичность);

$m < 0$, то *ЭПЦ* < 1 (неэластичное предложение);

$m > 0$, то *ЭПЦ* > 1 (эластичное предложение).

То есть эластичность предложения, в случае линейной функции полностью определяется точкой пересечения ее графика с осями. Если график начинается на оси цен, то предложение эластично, если на оси показывающей объем предложения, то неэластично, в пограничной ситуации – в начале координат, то имеет место единичная эластичность (рисунок 1.4.2).

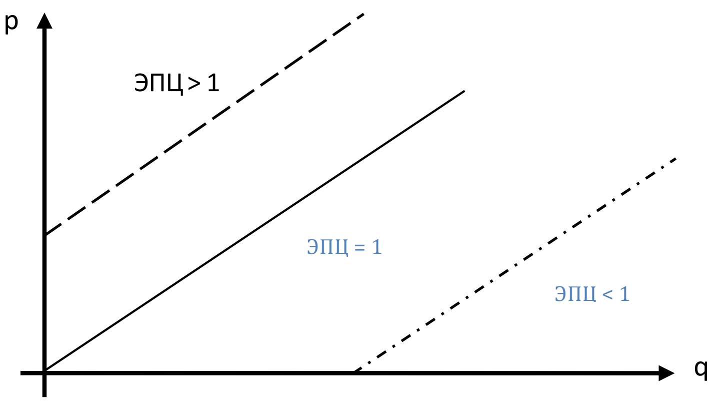


Рисунок 1.4.2. Эластичность предложения по цене для линейных функций.

1.4.7. Для того чтобы рассмотреть нелинейную функцию спроса $p = f(q)$, в формуле (1.4.2) перейдем к пределу при q_1 стремящемся к q_0.

Тогда

$$ЭСЦ = \frac{1}{f'(q_0)} \cdot \frac{p_0}{q_0}. \qquad (1.4.8)$$

Отметим, что число $f'(q_0)$ есть наклон касательной к графику функции в точке (q_0, p_0). Другими словами, все функции имеющие один и тот же наклон в точке (q_0, p_0) будут иметь одну и ту же эластичность спроса по цене. Так как среди этих функций есть и линейная функция с угловым коэффициентом $f'(q_0)$ рассуждения, приведенные выше, можно использовать и для анализа нелинейной ситуации. Например, проведем касательную к линии спроса, и если точка касания лежит в верхней половине отрезка, заключенного между осями, то спрос в этой точке эластичен (рисунок 1.4.3).

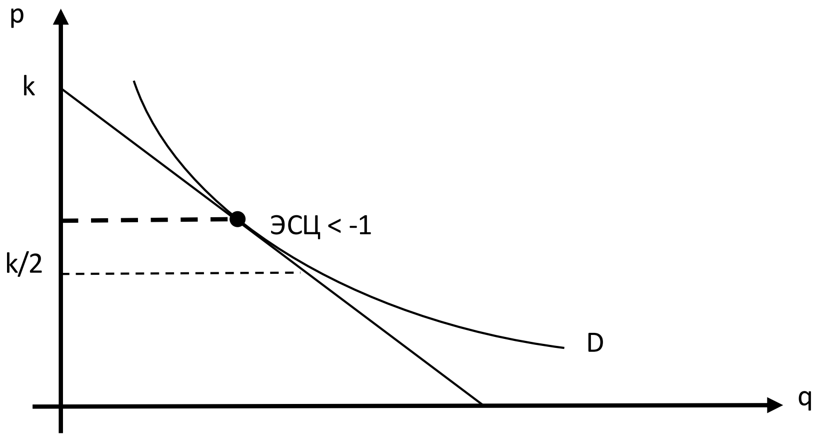


Рисунок 1.4.3 – эластичность спроса по цене для нелинейных функций

Точно также, проведем касательную к линии предложения, и если касательная пересечет ось цен, то предложение в этой точке эластично (рисунок 1.4.4).

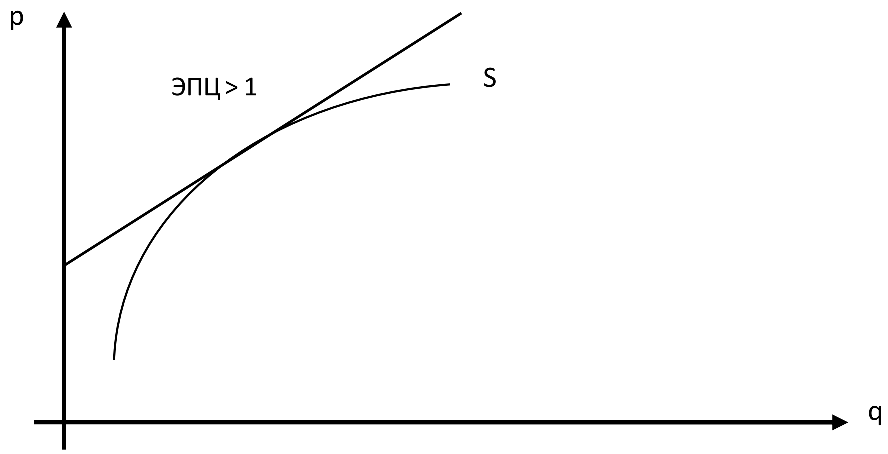


Рисунок 1.4.4 – эластичность предложения по цене для нелинейных функций

1.4.8. Приведем пример функций, которые для любых значений цены имеют одно и то же значение коэффициента ЭСЦ.

Пусть $p = q^s$, где $s < 0$. Тогда $f'(q_0) = sq^{s-1}$. Подставив значения в формулу (1.4.8), получим, что $ЭСЦ = \frac{1}{sq^{s-1}} \cdot \frac{q^s}{q} = \frac{1}{s}$.

Этот результат позволяет построить пример, опровергающий ложное мнение, о том, что всегда, чем выше цена, тем более эластичен спрос:

Пусть функция спроса определяется формулой $p = \begin{cases} 1/q, & 0 < q < 1, \\ 1/q^{0,5}, & q \geq 1 \end{cases}$

Тогда, при цене больше чем 1, ЭСЦ будет равно (-1), а при меньшей цене (-2).

1.4.9. В пунктах 5-8 функция спроса записана в виде $p = f(q)$, тогда как, обычно, ее записывают в виде $q = f(p)$. Дело в том, что значения функции откладываются по вертикальной оси, аргумента — по горизонтальной. А в модели спрос - предложение по вертикальной оси откладывается цена, по горизонтальной — объем спроса.

Стоит отметить, что исследование эластичности является популярным инструментом экономического анализа и существует много коэффициентов эластичности. Поэтому, полезно дать определение эластичности в общем виде.

<u>Определение</u>

Пусть имеет место функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда относительное изменение функции y деленное на относительное изменение x_k:

$$e = \frac{[y(x_1,\ldots,x_k + \Delta_k, \ldots, x_n) - y(x_1,\ldots,x_k, \ldots, x_n)] / y(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta_k / x_k} \qquad (1.4.9)$$

называется эластичностью функции y по x_k.

Переходя к пределу, получим, что коэффициент эластичности можно подсчитать через производную:

$$e = \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{y} \qquad (1.4.10)$$

Например, если объем спроса q есть функция от цены p, дохода I, цены другого товара r, то есть $q = f(q, I, r)$, то

(*эластичность спроса по цене*) = $\frac{[q(p+\Delta p, I, r) - q(p, I, r)]/q(p, I, r)}{\Delta p / p}$;

(*эластичность спроса по доходу*) = $\frac{[q(p, I+\Delta I, r) - q(p, I, r)]/q(p, I, r)}{\Delta I / I}$;

(*перекрестная эластичность спроса по цене*) = $\frac{[q(p, I, r+\Delta r) - q(p, I, r)]/q(p, I, r)}{\Delta r / r}$.

На языке производных:

($\textit{эластичность спроса по цене}$) $= \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$;

($\textit{эластичность спроса по доходу}$) $= \frac{\partial q}{\partial I} \cdot \frac{I}{q}$;

($\textit{перекрестная эластичность спроса по цене}$) $= \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{r}{q}$.

Пример 2

Спрос на яблоки описывается функцией $q_D = 5I/p_D$,
где q_D *- количество,* p_D *- цена,* I *- средний доход на душу населения. Функция предложения яблок* $q_S = 40p_S + 20 + 4r$. r *- цена груш.*
Считая, что $I = 1000$ *сомов,* $r = 20$ *сомов, определите:*

а. Равновесную цену и равновесный объем.

б. Эластичность предложения по цене в точке равновесия.

в. Эластичность спроса по цене в точке равновесия.

г. Эластичность спроса по доходу в точке равновесия.

д. Перекрестную эластичность предложения по цене в точке равновесия.

Решение

а. В точке равновесия при одинаковой цене объем спроса будет равен объему предложения. Поэтому, подставим соответствующие значения и получим $\frac{5 \cdot 1000}{p_E} = 40p_E + 20 + 4 \cdot 20$. Преобразовав уравнение, получим уравнение
$(40p_E)^2 + 100p_E - 5000 = 0$ с корнями $-12,5$ и 10. Первый корень посторонний. Итак, равновесная цена 10 и, соответственно, равновесный объем 500.

б. Производная функции предложения по цене равна 40.
Поэтому, по формуле (10)

($\textit{эластичность предложения по цене}$) $= 40 \cdot \frac{10}{500} = 0,8$.

в. Производная функции спроса по цене равна $-\frac{5 \cdot 1000}{p_D^2}$.

Поэтому, ($\textit{эластичность спроса по цене}$) $= -\frac{5 \cdot 1000}{10^2} \cdot \frac{10}{500} = -1$.

Этот же ответ можно было получить из вида функции спроса (см. пункт 8).

г. Производная функции спроса по доходу равна $\frac{5 \cdot 1}{p}$.

Поэтому, (*эластичность спроса по доходу*) = $\frac{5 \cdot 1}{10} \cdot \frac{1000}{500} = 1$.

Мы видим, что при имеющихся условиях яблоки являются нормальным товаром. Напоминаем, что коэффициент эластичности спроса по доходу положителен в случае нормального товара и отрицателен для низшего.

д. Производная функции предложения яблок по цене груш равна 4. Поэтому, по формуле (10)

(*перекрестная эластичность предложения по цене*) = $4 \cdot \frac{20}{500} = 0{,}16$.

Полученное положительное значение говорит о том, что при имеющихся условиях груши являются заменителями (субститутами) яблок. Если бы коэффициент был отрицателен, то мы бы сказали, что груши дополняют яблоки – являются комплиментарным товаром.

Пример 3

Исследовать на эластичность по цене функцию спроса $q = (8 - p)/(p+1)$.

По смыслу, цена и количество должны быть неотрицательны. Поэтому, область определения функции q отрезок $[0; 8]$. Производная функции q равна $-9/(p+1)^2$. Поэтому, коэффициент эластичности

$$e = \frac{-9}{(p+1)^2} \cdot \frac{p}{(8-p)/(p+1)} = \frac{-9p}{-p^2 + 7p + 8}.$$

Приравняв его к -1, определим, что функция имеет единичную эластичность при $p = 2$. Разобьем отрезок $[0; 8]$ точкой $p = 2$ на части, и подставляя значения цены из этих частей, (например $p = 1$ и $p = 5$) определим, что на промежутке $[0; 2)$ спрос неэластичен, а на промежутке $(2; 8]$ эластичен.

§1.5. Налоги, которые подходят экономике Кыргызстана

Часто говорят, что теория это одно, а жизнь это другое. Конечно, это неверное утверждение, и для того, чтобы показать тесную связь между теорией и практикой, предлагаем Вашему вниманию параграф, составленный из материалов статей, написанных в 2005 - 2017 годах [39-48].

Главная задача научной теории – помочь в объяснении явлений окружающей человека действительности. В экономической теории это делается с помощью моделей, которые позволяют заострить внимание на важнейших для исследователя характеристиках.

К сожалению, очень часто бывает так, что ученые развивают, а профессора преподают теорию только для того, чтобы заработать на жизнь, в то время как студенты изучают ее только для получения оценки на экзамене. Примеры и ситуации, призванные демонстрировать связь между экономической теорией и практикой, часто берутся из книг и касаются жизни США, Западной Европы и т.п. Они воспринимаются как нечто очень абстрактное, не имеющее отношение к Кыргызстану, и мало помогают в развитии умения применять теоретические знания к анализу реальной жизни.

В тоже время, в окружающей нас экономической действительности имеет место большое количество примеров, которые могут замечательно иллюстрировать экономические модели. О некоторых из них будет говориться в этой работе.

1.5.1. Ориентиром в развитии Кыргызстана является «Национальная стратегия устойчивого развития Кыргызской Республики (НСУР) на период 2013-2017 годы», утвержденная Указом Президента Кыргызской Республики 21 января 2014 года. Эта стратегия ставит целью вхождение Кыргызстана в число развитых стран с высоким уровнем образования, здоровой окружающей средой, общественной стабильностью, международным имиджем благополучной страны, устойчивым ростом экономики и высокой привлекательностью для инвесторов. В Национальной стратегии устойчивого развития к 2017 году предусматривается улучшение позиции Кыргызстана по целому ряду международных рейтингов и показателей. В том числе: по Индексу Восприятия Коррупции — быть в числе лучших 50 стран; довести уровень ВВП на душу населения до $2500. К сожалению, приходится констатировать, что эти цели вряд ли будут достигнуты: по рейтингу восприятия коррупции Кыргызстан в 2014 году входил в 20% стран с худшими показателями и занимал 136 место из 177 стран; в 2014 году ВВП на душу населения составил $1325. Конечно, можно ссылаться на объективные и субъективные факторы, негативно воздействующие на развитие экономики Кыргызстана. Но, следует признать, что основная причина в том, что власти

Кыргызстана не проводят адекватную, научно обоснованную экономическую политику.

Так, согласно сообщениям СМИ, наши депутаты озабочены увековечением памяти Ч. Т. Айтматова — переименование улицы в его честь, присвоением звания героя С. И. Ибраимову, проведением юбилея одного, другого, третьего достойного человека. В итоге, времени на рассмотрение актуальных экономических вопросов практически не остается. В этой связи хочется сказать, что не нужно создавать излишнего шума вокруг имен Ч. Т. Айтматова, С. И. Ибраимова и других выдающихся кыргызстанцев — лучшая память о них, это их славная деятельность.

Приведем цитату, в подкрепление высказанной мысли [49] : *У нас царит теперь разгул, вакханалия всякого рода празднеств, торжественных собраний, юбилеев, открытий памятников и т. д. Десятки и сотни тысяч рублей ухлопываются на эти "дела". ... Надо, наконец, понять, что, имея за спиной нужды нашей промышленности, имея перед лицом такие факты, как массу безработных и беспризорных — мы не можем и не имеем права допускать этот разгул и эту вакханалию расточительности. Иосиф Сталин*

Другое высказывание на эту тему опубликовано 4.03.2015 АКИpress в материале “*Тойэкономика, или «Валяй, валяй»*”.

Возьмем наше правительство. За прошлый год 2014 г. провели 13 юбилеев. На каждый юбилей из нашего госбюджета выделялись разные суммы, от 4 млн. и выше. В сумме это примерно миллион долларов по старому курсу. Празднование этих юбилеев на развитие никак не идет. С учетом того, что у нас в бюджете сплошные дыры, то проведение подобных юбилеев, как пир во время чумы. Конечно, помнить наших выдающихся людей нужно, но можно ведь обойтись без таких инструментов, как пышные празднества, скачки, бюсты, памятники и т.д. Эти модели проедания так и проецируются на общество, как тратится наш бюджет. Это очень хорошо показывает, как средняя кыргызская семья относится к деньгам, сбережению и накопительству капитала. Денежные отношения в государстве работают очень негативно. Они поощряют гипертрофированные расходы, не соответствующие доходам семьи. Очень *серьезно расшатывают ценностные ориентиры. Откуда берутся деньги? Какое будущее будет у молодежи?*

И еще очень важный момент, иррациональный. Это развязывает руки нашим чиновникам, которые считают, что вот такие показушные вещи, как празднования юбилеев и прочие мероприятия, это и есть показатель успешности их работы. Помнить и праздновать нужно в соответствии с бюджетом.

1.5.2. В последние годы в Кыргызстане постоянно наблюдается превышение государственных расходов над доходами — дефицит бюджета [50]. (В таблице 1.6.1, соответствующие данные приведены в млн. сомов.)

Таблица 1.6.1 – Дефицит бюджета Кыргызской Республики

Годы	2015	2016	2017	2018	2019
Дефицит Бюджета	6149	20889	16476	6189	432

Как следствие, правительство постоянно решает проблему увеличения доходов, и, соответственно, собираемости налогов. На словах, чиновники очень правильно понимают стоящую пред ними проблему. Так, господин К. Кумашов, бывший заместитель председателя ГНС КР, в интервью газете Мегаполис, 7.11.2014, №90(1022) говорил: — *Стратегической целью налоговой политики является создание в нашей стране стабильной и эффективной налоговой системы, которая позволит обеспечить рост поступления доходов в бюджет — с одной стороны, снизить административное бремя и создать необходимые условия для уплаты налога – с другой.* — Замечательные слова! Но, как только доходит до дела, выясняется, что почти все усилия чиновников направлены на создание системы, в которой каждый шаг налогоплательщика находится под контролем. Воистину правы авторы шутки [51]: *Души фискалов никогда не попадают в рай – они вечно преследуют души налогоплательщиков.*

Конечно, создать «правильную» налоговую систему очень сложно. *Самое непостижимое в этом мире – это налоговая шкала*, сказал Альберт Эйнштейн (1879–1955), физик-теоретик, один из основателей современной физики, лауреат Нобелевской премии [51]. Другой, не менее известный человек, британский премьер-министр Уинстон Черчилль (1874–1965), заметил, что

Хороших налогов не бывает [51]. Поэтому, было бы замечательно, если бы можно было обойтись без налогов. Говорят, что *налоги - главная головная боль любого бизнеса, даже криминального. Вот почему США, которые первые 100 лет не имели федеральных налогов, это богатейшая страна мира!* [51]

К сожалению, в наших условиях обойтись без налогов невозможно. Поэтому, создавая налоговую систему, приходится выбирать «из двух зол меньшее». При этом, было бы совсем не вредно, если бы те, кто постоянно пытается «улучшить» налоговую систему Кыргызстана прислушивались к мнению ученых-экономистов. В качестве негативного примера приведем процесс подготовки Налогового Кодекса, введенного в 2009 году. О том, что создатели Налогового Кодекса допускают большую ошибку, собираясь ликвидировать патентную систему, много говорилось в процессе обсуждения Кодекса. В частности, об этом говорится в работе Т.К. Камчыбекова, Г.А. Керимкуловой и С.К. Кыдыралиева, которая докладывалась осенью 2008 года на конференции в КЭУ [20]. Но, к сожаленью, к разумным доводам не прислушались, и в итоге, не прошло и трех месяцев после введения Налогового Кодекса, как его пришлось переделывать. Мы гордимся точным прогнозом, но как-то хочется иметь другие, положительные поводы для гордости.

Экономическая наука предполагает наличие пяти желательных характеристик любой налоговой системы. [52]

А. Экономическая эффективность: налоговая система не должна входить в противоречие с эффективным распределением ресурсов.

В. Административная простота: административная система должна быть простой и относительно недорогой в применении.

С. Гибкость: налоговая система должна быть в состоянии быстро реагировать (в некоторых случаях автоматически) на изменяющиеся экономические условия.

D. Политическая ответственность: налоговая система должна быть построена таким образом, чтобы убедить людей в том, что они платят для того чтобы политическая система была в состоянии более точно отражать их предпочтения.

Е. Справедливость: налоговая система должна быть справедливой в соответствующем подходе к различным индивидуумам.

Пожалуй, все согласятся с тем, что эти характеристики «правильные». Но, как говорится, дьявол кроется в мелочах. Система, которая успешно работает в одних условиях, может оказаться совершенно непригодной в других. Например, бывший в тот момент министром финансов Кыргызской Республики А. Жапаров в 2008 году на слушаниях по новому Налоговому Кодексу заявил, что эксперты из-за бугра написали налоговый кодекс, который плохо работает. Имело ли место вредительство? Думаем, что нет. Просто, они не приняли во внимание тот факт, что в странах Запада и у нас разная налоговая культура.

Вот что говорит по этому поводу Янош Корнаи — выдающийся экономист, венгр, один из самых известных критиков социалистической системы.

Контекст определяет, как тот или иной феномен должен быть интерпретирован. А мы пока не учим наших студентов применять на практике теоремы и утверждения исходя из контекста. Вот почему многое западные экономисты, активно выступавшие в качестве советников правительств восточноевропейских стран и России в реформировании системы, в определенный момент осознали, что все зависит от контекста. Они не были к этому готовы, несмотря на то что у них была очень хорошая база экономических знаний. У них не хватало знаний в области политологии, социологии, психологии, истории и т.п. [5]

1.5.3. Так какие же налоги нам нужны? Президент Российской Федерации В.В. Путин в своих выступлениях говорит: «Мы должны принимать простые в исполнении законы, так как пока не можем администрировать сложные». Своеобразной расшифровкой этого высказывания служат слова, которые произнес во время интервью 5-му каналу кыргызского телевидения 18 февраля 2013 года руководитель Федеральной таможенной службы России А. Бельянинов: «В Российской Федерации и Кыргызской Республике много хороших законов, но они часто не выполняются». Имея общее с россиянами прошлое, и как следствие одинаковый менталитет, мы тоже нуждаемся в простых для администрирования налогах.

Основу налоговой системы Кыргызской Республики составляет Налог на добавленную стоимость — НДС. Так, налоговые доходы 2013 года составили 72 842 388,5 тысяч сомов, из них в виде НДС было получено 30 083 176,3 тысяч сомов. При этом, этот налог является достаточно сложным для администрирования. Регулярно появляющиеся в СМИ сообщения о нарушения связанных с бланками НДС, о проблемах с возвратом НДС и т.п. подтверждают эту точку зрения. Являясь косвенным налогом, НДС также как и другие косвенные налоги — акцизный налог, налог с продаж, … , приводит к сужению рынка. Этот факт легко продемонстрировать, и это будет сделано в этой работе позднее. Выдающийся немецкий экономист, социолог, философ Карл Маркс (1818–1883), говорил [51] — *Косвенные налоги скрывают от каждого отдельного лица сумму, которую оно платит государству, тогда как прямой налог ничем не замаскирован, взимается открыто и не вводит в заблуждение даже самого темного человека. Прямые налоги, следовательно, побуждают каждого контролировать правительство, тогда как косвенные налоги подавляют всякое стремление к самоуправлению.*

Поэтому, мы считаем, что налоговая система Кыргызстана должна быть преимущественно построена на прямых налогах, более того на основе обязательного патента. Является ли эта мысль для нашего правительства слишком оригинальной или трудноосуществимой? Нет. По всей видимости, лучше всего обратиться к главе правительства. *За летний курортный сезон от пансионатов озера Иссык-Куль поступило в 2,1 раза больше налоговых поступлений, чем за аналогичный период прошлого года. Об этом 17 сентября 2012 года на совещании в правительстве по вопросу борьбы с теневой экономикой сообщил первый вице-премьер-министр Джоомарт Оторбаев. По его словам, в начале курортного сезона предпринимателям предложили участвовать в эксперименте Государственной налоговой службы. Участвовавшие в программе полностью освобождались от проверок, и работали на основе патента.*

"Практически все пансионаты согласились с данным предложением. Так как это означало освобождение от выплат взяток проверяющим органам", - отметил Дж. Оторбаев.

Скептики, а также лица, которым выгодно текущая ситуация в налоговой сфере могут утверждать, что это случайность, что патентная система несправедлива, … . Приходилось даже слышать слова о том, что это неправильно, когда человек работая много и успешно получает большую, чем у других прибыль.

Как говорил знаменитый физик Людвиг Больцман: «Нет ничего более практичного, чем хорошая теория» [51]. И теория подтверждает выгодность патентной системы. Далее, будут приведено теоретическое обоснование преимуществ патентной системы, а также примеры, демонстрирующие воздействие различных видов налогов на предпринимателей.

1.5.4. *Начинающий предприниматель Искендер, предполагая, что в наступающем летнем сезоне будут в моде сарафаны, решил просчитать выгоды соответствующего бизнеса. Он определил, что издержки подготовки к производству и продаже новой модели сарафанов составят 40 000 сомов, средние переменные издержки производства сарафанов будут равны 440 сом,* а *цена задается функцией* $p = 940 - q$.

Составив функцию выручки $R = (940 - q)q$ (q – объем продаж) и функцию издержек $C = 40000 + 440q$ (q – объем производства), Искендер определил функцию прибыли

$$Pf = R - C = (940 - q)q - (40000 + 440q) = -q^2 + 500q - 40000.$$

Взяв производную от функции прибыли, и приравняв ее к нулю, получим, что для максимизации прибыли фирма должна произвести и продать 250 единиц товара: $Pf' = -2q + 500 \Rightarrow -q + 500 = 0 \Rightarrow q = 250.$

При этом цена единицы товара $p = 940 - 250 = 690$, а величина прибыли

$$Pf = 690 \cdot 250 - (40000 + 440 \cdot 250) = 172500 - 150000 = 22500.$$

Вскоре после этого, Искендеру сообщили, что он должен платить налог. При этом можно платить или паушальный налог 8500 сомов или акцизный налог при ставке 36 сомов.

Обдумывая ситуацию, он выяснил, что *паушальный налог (lump sum tax) взимается в виде некоторой фиксированной денежной суммы. У нас он, обычно, рассматривается как плата за патент.*

Необходимость выплаты паушального налога фирма воспринимает как дополнительные постоянные издержки. В результате, меняется функция издержек: $C_L = 40000 + 440q + 8500$ и, соответственно, функция прибыли

$$Pf_L = (940 - q)q - (48500 + 440q) = -q^2 + 500q - 48500.$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, Искендер увидел, что, как и в случае без налогов, фирма получает максимальную прибыль, производя 250 единиц товара и продавая его по цене 690:

$$Pf' = -2q + 500 \Rightarrow -2q + 500 = 0 \Rightarrow q = 250; \quad p = 940 - 250 = 690.$$

При этом величина прибыли фирмы $Pf = 14000$, а сумма прибыли фирмы и общей величины собранного налога: $14000 + 8500 = 22500$, равна величине прибыли фирмы при отсутствии налога

По поводу акцизного налога он узнал, что *акцизный налог (excise tax) есть некоторая фиксированная денежная сумма, которая выплачивается с каждой проданной единицы товара или услуги. Введение или изменение акцизного налога приводит к соответствующему изменению средних переменных издержек.*

Функция прибыли фирмы, если фирма должна будет платить налог в размере 36 сомов с каждой реализованной единицы товара

$$Pf = R - C - T_a = -q^2 + 500q - 40000 - 36q = -q^2 + 464q - 40000$$

(T_a – *общая величина акцизного налога*).

Производная от функции прибыли определяет оптимальный объем производства: $Pf' = -2q + 464 \Rightarrow -2q + 464 = 0 \Rightarrow q = 232.$

Мы видим, что введение акцизного налога 36 сомов привело к сокращению объема продаж и повышению цены ($p = 940 - 232 = 708$).

Прибыль фирмы будет равна

$$Pf = 708 \cdot 232 - (40000 + 440 \cdot 232) - 36 \cdot 232 = 13824,$$

а общая величина собранного налога $36 \cdot 232 = 8352$.

Обратим внимание на то, что сумма двух последних чисел, прибыли фирмы и общей величины собранного налога: *8352 + 13824 = 22176*, меньше, чем величина прибыли фирмы при отсутствии налога, 22500 сомов.

Разница, *324* сомов, объясняется сокращением объема продаж, и в экономической теории называется потерей мертвого груза.

Итак, мы видим полностью негативное последствие акцизного налога на экономику: зона прибыли сузилась, объем продаж сократился, цена выросла, прибыль фирмы упала, причем потери фирмы для общества не компенсируются в полной мере увеличением налоговых сборов государства.

Итак, Искендер выяснил, что если он выберет паушальный налог, то он будет занимать большую долю рынка и иметь большую прибыль, чем при акцизном налоге.

Через некоторое время Искендер с удивлением узнал, что его хороший знакомый, занимающийся подобным бизнесом, платит акцизный налог. «Почему ты выбрал этот налог? Ведь расчеты показывают, что паушальный налог выгоднее» — спросил он. В ответ его знакомый рассмеялся и под большим секретом объяснил ему свой выбор. Оказалось, что он договорился с налоговым инспектором и вместо 232 единиц в официальных документах указывает только 100 единиц проданного товара. В результате, его прибыль составляет

$708 \cdot 232 - (40000 + 440 \cdot 232) - 36 \cdot 100 = 18576.$

Из этой суммы он отдает налоговому инспектору 3000 сомов и у него остается 15576 сомов.

Надеемся, что теперь Искендер в состоянии ответить на вопрос, который, согласно сообщению агентства Akipress, *задал бывший в тот момент главой Государственной налоговой службы Исхак Масалиев 2 ноября 2012 года во время обсуждения введения налоговых контрактов для субъектов предпринимательства: «Почему кафе «Фаиза» согласилось на 5 млн. сомов в год, а кафе «Арзу» не согласно на 130 тыс. сомов?».*

1.5.5. В окружающей нас экономической действительности имеет место большое количество примеров, которые могут замечательно иллюстрировать экономические модели.

Рассмотрим сказочную ситуацию [53].

Задача 1

Марья Искусница получила разрешение взять 1 яблоко из царского сада. Пришла она к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, причем каждый забор имеет одни ворота, которые охраняет сторож. Подошла Марья Искусница к 1-му сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ей сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину яблок, которые будут при тебе, и еще одно». Эти же слова повторили Марье Искуснице сторожа, охранявшие вторые и третьи ворота. Сколько яблок должна собрать Марья Искусница, для того чтобы после выполнения требований сторожей, у нее осталось одно яблоко?

Эту задачу несложно решить, начав с конца. После 3-го сторожа у нее осталось одно яблоко, значит, до него у нее было $(1 + 1)2 = 4$ яблока. Соответственно, перед 2-м сторожем было $(4 + 1)2 = 10$ яблок, а перед 1-м: $(10 + 1)2 = 22$ яблока.

Задача 2

В следующий раз (смотри предыдущую задачу), Марья Искусница, получив такое же разрешение от царя, пришла к саду и увидела, что там уже 10 ворот, и каждый сторож имеет, то же требование, что и раньше. Сколько яблок должна собрать Марья Искусница на этот раз?

Эту задачу также можно решить, начав с конца, но удовольствие от расчета 10 шагов «ниже среднего». В то же время задачу легко решить через разностное уравнение.

Пусть x_k количество яблок у Марьи Искусницы после сторожа с номером k. Тогда, получим задачу $x_k = 0{,}5x_{k-1} - 1, \quad x_{10} = 1, \quad x_0 = ?$

решение которой удовлетворяет уравнению

$$1 = x_{10} = 0{,}5^{10}x_0 - 1\cdot\frac{1 - 0{,}5^{10}}{1 - 0{,}5}.$$

Следовательно, $x_0 = 3070$.

Руководители разных уровней регулярно говорят о мерах по поддержке малого и среднего бизнеса. А на деле «воз и ныне там». Что нужно делать? Для того чтобы решить проблемы должны быть выработаны, простые, и самое главное, легко осуществимые «правила игры» между государством и бизнесом.

В нашей модели царь это государство, Марья Искусница —— предприниматель, сторожа — чиновники различных государственных структур. Из решения предыдущей задачи следует, что в условиях, когда предприниматель должен один на один договариваться с каждой государственной структурой (налоговой, пожарной, санитарной, …), ему нужно собрать 3070 яблок, для того чтобы получить себе 1 яблоко, и при этом государство не имеет ничего.

Рассказав эту задачу студентам, я задал вопрос: «Что делать в такой ситуации предпринимателю?» Ответ был весьма прост. «Марья Искусница должна договориться с самым сильным и платить только ему». Очень хорошая мысль и осталось только сказать, что в нормальной ситуации самым сильным является государство — в нашей истории царь.

Задача 3

В третий раз (смотри 2 предыдущие задачи), Марья Искусница решила предложить 2000 яблок царю, за то, что он установит единую плату: по 100 яблок каждому сторожу и разрешит собрать столько же яблок, сколько во 2-й раз. Будет ли поддержано ее предложение?

Если введены единые простые правила – 100 яблок каждому сторожу и 2000 царю, то в этой ситуации будет недоволен

1-й сторож: он получит 100 яблок вместо $3070:2 + 1 = 1536$ яблок.

Так же будут недовольны

2-й сторож, который получит: $1534:2 + 1 = 768$ яблок;

3-й сторож, который получит: $766:2 + 1 = 384$ яблок;

4-й сторож, который получит: $382:2 + 1 = 192$ яблок.

Пятый сторож, который получит: $190:2 + 1 = 96$ яблок и все остальные сторожа, с шестого до десятого, которые, напоминаем, получают по 100 яблок, а также царь и Марья Искусница, которая получит 70 яблок вместо одного, будут в выигрыше. Отметим, что царь, то есть государство получает 2000, тогда как в условиях 2-ой задачи он не получал ничего.

1.5.6. На протяжении нескольких последних лет в Кыргызской Республике пытаются улучшить налоговое законодательство. Но предпринимаемые усилия не приносят особой пользы, а усилия разработчиков напоминают усилия героя басни Крылова «Тришкин кафтан». В то же время очень простую и эффективную налоговую систему можно построить, взяв за основу паушальный налог — у нас его больше знают как патентную систему. И эта система может быть примером тех самых единых простых правил, о которых говорилось выше.

Вначале приведем теоретическое обоснование.

Пример 1

На некотором рынке спрос на товар задан функцией $p = 280 – 1,4q$, функция издержек фирмы имеет вид $TC = 5000 + 70q$.

Требуется определить:

а) цену, при которой фирма получит максимальную прибыль, и размер этой прибыли;

б) цену и прибыль, если имеет место налог на добавленную стоимость (НДС) 12%;

в) величину акцизного налога, при которой будет собран налог соответствующий 12% НДС;

г) ставку налога на прибыль, при которой будет собран налог соответствующий 12% НДС;

д) цену и прибыль, если имеет место паушальный налог, равный налоговой выручке при НДС 12%.

Решение

а) Функция прибыли фирмы при отсутствии налогов

$Pf = R – TC = pq – TC = (280 – 1,4q)q – (5000 + 70q) =$

$= -1,4q^2 + 210q - 5000$ (*R - выручка, TC - общие издержки).*

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, получим, что для того чтобы получить максимальную прибыль фирма должна произвести и продать 75 единиц товара: $Pf' = -2,8q + 210 \Rightarrow -2,8q + 210 = 0 \Rightarrow q = 75.$

Стоит отметить, что условие максимизации прибыли может быть записано в виде более привычном для курса микроэкономики:

$$Pf' = 0 \Rightarrow (R - C)' = 0 \Rightarrow R' - C' = 0 \Rightarrow R' = C' \Rightarrow MR = MC.$$

— *Максимум прибыли достигается при объеме производства, обеспечивающего равенство маржинальной выручки и маржинальных затрат.* —

Согласно теории, значение маржинальной величины есть значение производной от соответствующей функции.

В условиях нашего примера

маржинальная выручка: $MR = R' = (280q - 1,4q^2)' = 280 - 2,8q;$

маржинальные затраты: $MC = C' = (5000 + 70q)' = 70.$

Приравняв эти величины, получаем, конечно же, тот же результат:

$280 - 2,8q = 70 \Rightarrow 2,8q = 210 \Rightarrow q = 75.$

При этом цена единицы товара $p = 280 - 1,4 \cdot 75 = 175$, а величина прибыли $Pf = 175 \cdot 75 - (5000 + 70 \cdot 75) = 13125 - 10250 = 2875.$

б) Если имеет место налог на добавленную стоимость (НДС) равный 12%, то фирма производящая этот товар воспринимает спрос как функцию

$$p = \frac{1}{1 + 0,12}(280 - 1,4q) = 250 - 1,25q$$

Повторив выкладки, приведенные в предыдущем пункте с функцией спроса $p = 250 - 1,25q$, увидим, что 12%-ный НДС уменьшает объем производства до 72 единиц и повышает цену до $p = 280 - 1,4 \cdot 72 = 179,2$.

Из этих денег фирме достается: $179,2/(1 + 0,12) = 160.$

Поэтому, фирма заработает $160 \cdot 72 = 11520,$ истратив $TC(72) = 5000 + 70 \cdot 72 = 10040.$

Соответственно, прибыль будет равна *1480*.

Государство получит НДС в размере $19,2 \cdot 72 = 1382,4.$

Вспомнив о том, что в ситуации, когда отсутствовал налог, прибыль была равна 2875, увидим, что потери общества, связанные с введением НДС равны $2875 - (1480 + 1382{,}4) = 12{,}6$.

Следовательно, введение НДС привело к сокращению объема производства и продаж, повышению рыночной цены и потерям общества. Указанные негативные последствия введения НДС носят экономический характер.

Сейчас активно обсуждается идея повышения ставки НДС до 14%. По нашему мнению, эта мера вряд ли приведет к существенному росту налоговых сборов. Дело в том, что на практике, при взимании НДС существенными являются административные проблемы. Так, 14 февраля 2013 информационное агентство Tazabek сообщило, что, согласно исследованию теневой экономики, проведенному министерством экономики, основными причинами, влияющими на занижение фонда заработной платы и налогов, являются проблемы с зачетом НДС (51,5%) и сложность подготовки форм отчетности по НДС (50,5%). (В процентах от числа опрощенных предпринимателей.)

Одна из основных проблем, связанных с НДС — это деятельность лжепредприятий, которые создаются с целью незаконного получения зачета по НДС, а также легализации незаконного оборота товаров. Предприятие открывается только для того, чтобы через него можно было путем осуществления бестоварных, фиктивных операций и оформления счет-фактур получить зачет на НДС.

в) Для того чтобы собрать налог величиной *1382,4* (соответствующий 12% НДС), надо ввести акцизный налог величиной a, где a находится из условия

$\begin{cases} aq = 1382{,}4, \\ 280 - 2{,}8q = 70 + a. \end{cases}$ 2-ое уравнение есть условие максимизации прибыли при введении акцизного налога величиной a, которое означает равенство маржинальной выручки и маржинальных затрат.

Выразим a из 2-го уравнения и подставим в 1-ое: $\begin{cases} (210 - 2{,}8q)q = 1382{,}4, \\ 210 - 2{,}8q = a. \end{cases}$

Полученное уравнение эквивалентно квадратному уравнению

$2{,}8q^2 - 210q + 1382{,}4 = 0$. Его корни $q = 67{,}7$ и $q = 7{,}3$ определяют объемы производства, которые при уровнях акцизного налога $a = 1382{,}4 / 67{,}7 = 20{,}42$ и

$a = 1382,4 / 7,3 = 189,37$ дают искомый объем налога.

Не нужно удивляться тому, что получилось два ответа – это следует из вида кривой Лэффера.

Итак, при ставке акцизного налога $a = 20,42$ объем продаж будет равен $67,7$. При этом цена будет равна $p = 280 – 1,4 \cdot 67,7 = 185,22$.

Поэтому, прибыль фирмы будет равна

$185,22 \cdot 67,7 – [5000 + (70 + 20,42) \cdot 67,7] = 1417,96$,

а потери общества, связанные с введением акцизного налога при ставке $a = 20,42$ равны $2875 – (1417,96 + 1382,4) = 74,64$.

Приведенный анализ показывает, что акцизный налог оказывает сугубо негативное воздействие на экономику. Поэтому, по нашему мнению, его можно применять только при налогообложении общественно вредных товаров, типа табака, алкоголя. В тех случаях, когда акцизным налогом облагаются ювелирные изделия, то это попахивает «пережитками коммунистической идеи», проповедующей преимущества бедности.

г) Прибыль фирмы при ставке налога на прибыль t и объеме производства и продажи величиной q, равна $Pf_t = (1 - t)(R – C)$.

Возьмем производную: $Pf_t' = [(1 - t)(R - C)]' = (1 - t)(R' - C')$,

приравняем ее к нулю: $(1 - t)(R' - C') = 0 \Rightarrow R' - C' = 0$ и получим, что в случае налога на прибыль условие максимума прибыли фирмы то же самое, что и для случая без налогов.

В нашем случае, $Pf_t = (1 - t)(pq – TC) =$

$(1 - t)[(280 – 1,4q)q – (5000 + 70q)] = (1 - t)[-1,4q^2 + 210q – 5000]$.

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, получим, что, как и в безналоговом случае, для максимизации прибыли фирма должна произвести и продать 75 единиц товара:

$$Pf' = (1 - t)[-2,8q + 210] \Rightarrow -2,8q + 210 = 0 \Rightarrow q = 75.$$

При этом цена единицы товара $p = 280 – 1,4 \cdot 75 = 175$, а величина прибыли фирмы при ставке налога на прибыль t будет равна

$$Pf_t = (1 - t)[175 \cdot 75 – (5000 + 70 \cdot 75)] = (1 - t)2875.$$

Следовательно, для того чтобы собрать налог величиной *1382,4* (соответствующий 12% НДС), надо ввести налог на прибыль при ставке t, где величина t находится из условия $t \cdot 2875 = 1382,4$. Таким образом, искомая величина ставки налога на прибыль равна $\frac{1382,4}{2875} \cdot 100\% = 48\%$. При этом, прибыль фирмы будет равна $2875 - 1382,4 = 1492,6$, потерь общества не будет, цена и объем производства будут такими же, что и в случае без налогов.

Наши выкладки демонстрируют, что, теоретически, налог на прибыль является замечательным налогом. Он не имеет негативного воздействия на поведение фирмы, и только перераспределяет прибыль между фирмой и государством, не допуская потерь общества. Очень возможно, что этот факт в некоторой степени объясняет то, что США являются великой экономической страной — основным корпоративным налогом, то есть налогом на производителей в США является налог на прибыль.

д) Фирма воспринимает паушальный налог как постоянные затраты, и соответственно, просто вычитает эту величину из прибыли. Поэтому, функция прибыли фирмы при паушальном налоге *1382,4,* соответствующем 12%-ой ставке НДС: $Pf_L = R - TC - 1382,4 = pq - TC - 2176 =$
$=(280 - 1,4q)q - (5000 + 70q) - 1382,4 = -1,4q^2 + 210q - 6382,4.$

Вычисляем производную, и так как производная от числа равна нулю, попадаем в ту же ситуацию, что и в случае без налогов: для того чтобы получить максимальную прибыль фирма должна произвести и продать 75 единиц товара:
$Pf' = -2,8q + 210 \Rightarrow -2,8q + 210 = 0 \Rightarrow q = 75.$

При этом цена единицы товара $p = 280 - 1,4 \cdot 75 = 175$, а величина прибыли $Pf_L = 175 \cdot 75 - (5000 + 70 \cdot 75) - 1382,4 = 2875 - 1382,4 = 1492,6.$

Еще раз подчеркнем, что паушальный налог и налог на прибыль, не меняют объем продаж и рыночную цену, а также не приводят к потерям для общества в целом. Они заведомо лучше, чем акцизный налог и НДС.

Для того чтобы было удобно сравнивать, соберем итоговые результаты воздействия различных налогов в таблицу (таблица 1.6.2.):

Таблица 1.6.2. - Результаты воздействия различных налогов

	Цена	Объем продаж	Прибыль фирмы	Налоговая выручка	Потери общества
Без налога	*175*	*75*	*2875*	*0*	*0*
НДС 12%	*179,2*	*72*	*1480*	*1382,4*	*12,6*
Акциз $20,42	*185,22*	*67,7*	*1417,96*	*12237,5*	*74,64*
48% прибыли	*175*	*75*	*1492,6*	*1382,4*	*0*
Паушальный $*1382,4*	*717,5*	*250*	*10000*	*12500*	*0*

1.5.7. Отметим, что кроме очень простого администрирования, по сравнению с налогом на прибыль, паушальный налог обладает еще одним важным для развивающейся экономики свойством – он в большей степени поощряет стремление фирм к снижению издержек и увеличению объема производства.

Покажем это на следующем примере.

<u>Пример 2</u>

Пусть спрос на товар фирмы задается функцией $p = 100 - 0{,}01q$, затраты функцией $TC = 30000 + 50q$. Требуется определить цену, при которой фирма получит максимальную прибыль, и размер этой прибыли.

<u>Решение</u>

Функция прибыли фирмы $Pf = R – TC = pq – TC =$

$= (100 - 0{,}01q)q – (30000 + 50q) = -0{,}01q^2 + 50q – 30000,$

имеет максимум там, где ее производная равна нулю:

$Pf' = -0{,}02q + 50 \Rightarrow -0{,}02q + 50 = 0 \Rightarrow q = 2500.$

При этом, цена $p = 100 – 0{,}01 \cdot 3000 = 75,$

величина прибыли $Pf = 75 \cdot 2500 - (30000 + 50 \cdot 2500) = 32500.$

Как уже было показано выше, в случае, когда фирма обязана платить паушальный налог в размере 3250, и в случае, когда она платит налог в размере 10% от прибыли, она будет производить и продавать то же количество — 2500 единиц товара по той же цене 75, что и в случае без налога. При этом государство в виде налога получит 10% от прибыли фирмы $0,1 \cdot 3250 = 3250$, а фирма получит прибыль 29250.

Теперь представьте, что в результате усовершенствования технологии производства, фирме удалось снизить переменные издержки и теперь вместо $TC = 30000 + 50q$, функция издержек выглядит так: $TC_1 = 30000 + 40q$.

Тогда, в случае паушального налога 3250:

$$Pf_1 = R - TC_1 - 3250 = pq - TC_1 - 3250 = (100 - 0{,}01q)q - (30000 + 40q) - 3250 =$$

$$= -0{,}01q^2 + 60q - 33250 \quad (R \text{ - выручка, } TC \text{ - общие издержки}).$$

Взяв производную, и приравняв ее к нулю, увидим, что, максимальную прибыль фирма получит, производя 3000 единиц товара и продавая его по цене 70:

$$Pf' = -0{,}02q + 60 \Rightarrow -0{,}02q + 60 = 0 \Rightarrow q = 3000;$$

$$p = 100 - 0{,}01 \cdot 3000 = 70.$$

При этом величина прибыли

$$Pf = 70 \cdot 3000 - (30000 + 40 \cdot 3000) - 3250 = 56750.$$

В случае 10%-ного налога на прибыль:

$$Pf_2 = (1 - 0{,}10)[R - TC_1] = (1 - 0{,}10)[pq - TC_1] =$$

$$(1 - 0{,}10)[(100 - 0{,}01q)q - (30000 + 40q)] = (1 - 0{,}10)[-0{,}01q^2 + 60q - 30000].$$

Приравняв к нулю производную, увидим, что, так как множитель $(1-0{,}10)$ не влияет на результат, фирма получит максимальную прибыль, производя 3000 единиц товара и продавая его по цене 70.

При этом величина прибыли

$$Pf = (1 - 0{,}10)[70 \cdot 3000 - (30000 + 40 \cdot 3000)] = 0{,}9 \cdot 60000 = 54000.$$

Приведенный пример показывает, что в случае паушального налога увеличение объема продаж приводит к большему увеличению прибыли, чем в случае налога на прибыль. При этом, стоит напомнить, что паушальный налог и налог на прибыль, как это было показано в предыдущих примерах, не меняют объем продаж и рыночную цену, а также не приводят к потерям для общества в целом. Они заведомо лучше, чем НДС, акцизный налог, налог с продаж и им подобных.

1.5.8. Приведенные теоретические обоснования и примеры из практики убедительно показывают, что если строить Налоговую Систему, служащую интересам Кыргызстана, а не недобросовестной части работников налоговых служб, то за основу нужно брать обязательный патент. Для того чтобы еще раз подкрепить этот тезис, обратимся к мнению одного из самых известных современных экономистов, лауреата Нобелевской премии, Дж. Ю. Стиглица [52]. *Любая налоговая система оказывает влияние на поведение людей. Поскольку государство забирает деньги у отдельных лиц, мы ожидаем, что оно взамен будет каким-то образом реагировать на их более низкие доходы. Когда мы говорим, что хотим, чтобы налоговая система была не искажающей, ясно, что мы не подразумеваем, что при этом индивидуум не будет затронут. Налог является неискажающим тогда и только тогда, когда индивидуум не может предпринять что-либо, чтобы изменить свои налоговые обязательства. Экономисты называют неискажающие налоги паушальными налогами. Любой налог на товар — искажающий: человек может изменить свои налоговые обязательства , просто сократив покупки соответствующего товара. Таков же и любой подоходный налог: сократить его можно, просто меньше работая или сберегая.*

Искажающие налоги неэффективны в том смысле, что, если бы государство могло заменить их паушальным налогом, оно получало бы более крупные поступления при тех же последствиях для благосостояния людей или соответственно государство могло бы сохранять те же поступления, но увеличивать благосостояние людей.

Итак, по Стиглицу, каждый раз заменяя какой-нибудь налог на паушальный государство получает выигрыш или в виде большей налоговой выручки, или в виде повышения благосостояния своих граждан.

Что нужно, для того чтобы налоговая система, на основе обязательного патента, работала должным образом?

В первую очередь, руководство должно захотеть навести порядок в налоговой системе.

Во-вторых, государство может улучшить функционирование налоговой системы, основанной на патентах. Преимуществами этой системы являются простота администрирования и минимизация контактов между налоговиками и предпринимателями. Мы предлагаем повысить эффективность этой системы следующим образом. В республике много торговых центров, рынков, базаров, на которых торгуют мелкие и средние предприниматели. Они платят за аренду и осуществляют свою деятельность по патентам. Мы рекомендуем государству брать обязательный налог в виде патента с не с большого количества арендаторов, а только с арендодателя, который в свою очередь включит затраты на выплату этого налога в стоимость аренды. Непредвзятый анализ этого предложения должен продемонстрировать, что он имеет много достоинств.

Заключение по главе 1

Переход от командной экономики к рыночной сопровождался значительным падением экономики постсоветских стран. В качестве одной из основных причин столь печальной картины можно назвать отсутствие предпринимательских способностей, которые тщательно искоренялись при социализме. В то же время стремление заниматься бизнесом желательно подкреплять соответствующими знаниями.

Вряд ли кто сомневается в важности образования. Даже в таком случае будет не лишним привести высказывания двух великих американцев.

«Ничто так не способствует процветанию, могуществу и счастью нации, как образование» — говорил Томас Джефферсон. Эту мысль продолжает Джон Фицджеральд Кеннеди: «Прогресс нашей страны не может быть более быстрым чем прогресс нашего образования».

Для того чтобы процесс обучения был эффективным, нужно чтобы учащиеся были заинтересованы в предмете обучения. Кроме этого, необходимо стараться сделать процесс наглядным и занимательным. В данной главе предложено простое и занимательное изложение модели CVP. Это изложение естественным образом перетекает в обсуждение проблем налогообложения. Существенной частью работы являются выкладки, показывающие преимущества паушального налога перед акцизным.

Василий Леонтьев, лауреат нобелевской премии 1973 года, говорил: «Экономисты в своих эмпирических исследованиях (то есть основанных на практическом опыте) обязаны опираться на факты. Но многие, особенно лучшие экономисты, любят теоретизировать, оперировать абстрактными категориями» [5]. В данной главе сделана попытка показать, что базовые экономические понятия, тесно связанные с экономической действительностью, такие, как эластичность имеют простую математическую основу. Возможно, будет уместно выражение одного из самых богатых людей мира Уоррена Баффета: «Если бы для того, чтобы стать успешным инвестором требовалось знать высшую математику, я бы вернулся в разносчики газет».

Великий экономист Милтон Фридман говорит: «Думаю, слишком большой акцент делается на математику как таковую, а не на математику, помогающую понять взаимосвязи в экономике» [5].

Надеемся, что материал, изложенный в данной главе, поможет повысить уровень бизнес образования.

Следует отметить, что при изложении материала мы придерживаемся мнения выдающегося древнеримского философа Сенеки: «Самый простой пример убедительнее самой красноречивой проповеди».

ГЛАВА 2
НОВАЯ МЕТОДИКА ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При изучении наук задачи полезнее правил.
Сэр Исаак Ньютон

§ 2.1. Финансовые и инвестиционные расчеты на базе разностных уравнениях

В этом параграфе мы продемонстрируем, как многие основные финансовые операции можно описать с помощью линейного разностного уравнения первого порядка

$$x_n = ax_{n-1} + b, \qquad (2.1.1)$$

и как формулу, задающую ее решение

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1 - a^n}{1 - a}, \qquad (2.1.2)$$

использовать для получения решений финансовых и инвестиционных задач.

2.1.1. Вначале напомним базовые понятия теории стоимости денег во времени.

В финансах принято оперировать процентами. Но выясняется, что это неоднозначное понятие. К примеру, банк предлагает кредит под 20%. Если Вы получили на руки $10 000 на 1 год, сколько денег нужно будет вернуть? Можно предполагать, что $12 000, но может оказаться, что это не верно. Дело в том, что за 100% банки обычно берут сумму к возврату, считая, что $10 000 есть 80%. Соответственно, сумма к возврату тогда будет равна $12 500.

Для того чтобы различать ситуации желательно называть их разными именами.

В случае, когда получалось, что нужно вернуть $12 000 говорят, что 20% есть <u>ставка интереса</u> (*rate of simple interest*),

а в случае, когда получалось, что нужно вернуть $12 500 говорят, что 20% есть <u>ставка дисконта</u> (*rate of simple discount*).

Напомним точные формулировки этих понятий.

Пусть

- P – начальная сумма или сумма вложения;
- A – конечная сумма или сумма погашения;
- t – время, в годах, за которое получен доход.

Тогда ставку простого интереса (r) можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{A - P}{P} \cdot \frac{1}{t} \qquad (2.1.3)$$

Формула (2.1.3) очень часто используется в преобразованном виде:

$$A = P + Prt = P(1+rt). \qquad (2.1.4)$$

<u>Пример 1</u>

Азамат закрыл счет «до востребования», сняв $2080 1-го октября. Сколько денег он добавил 1-го июля, если известно, что на этом счете 1-го января было $1000? Ставка интереса 16%.

Из формулы $P = \frac{A}{1 + rt}$ следует, что сразу после добавки на счете было $\frac{2080}{1 + 0{,}16\cdot(3/12)} = \$2000$. А перед вкладом, 1-го июля, на счете было $\$1000(1 + 0{,}16(6/12)) = \$1080$. Следовательно, Азамат добавил на счет $\$2000 - \$1080 = \$920$.

Ставка дисконта вычисляется по формуле

$$r_d = \frac{A - P}{A} \cdot \frac{1}{t} = \frac{d}{At} \qquad (2.1.5)$$

Формула (2.1.5) может быть преобразована к виду

$$P = A(1 - r_d\, t). \qquad (2.1.6)$$

<u>Пример 2</u>

В результате сделки, через 4 месяца было получено 27000 сомов. Сколько денег было вложено, если известно, что доходность составила 30% простого дисконта?

Из формулы (2.1.6) получаем:

$P = 27000\,(1 - (4/12)\cdot 0{,}30) = 24300$ сомов.

Обычно, в формулах для финансовых и инвестиционных расчетов используется ставка интереса. В то же время, на практике, нередко используется и ставка дисконта. Поэтому, для удобства использования, полезно иметь под рукой формулы, выражающие ставку интереса через ставку дисконта и обратно:

$$r = \frac{r_d}{1 - r_d t} \qquad \text{и} \qquad r_d = \frac{r}{1 + rt}.$$

2.1.2. Сложный интерес

Пусть сумма P вложена в операцию, длительность которой равна T. В это время в каждый из N периодов длительностью t $(N = T/t)$, операция приносит доход rt процентов, соответствующий $r\%$ простого интереса. Тогда, если обозначить через x_n количество денег на счете в конце периода с номером n, то имеет место уравнение $x_n = (1+ rt)x_{n-1}$ с начальным условием $x_0 = P$.

Поэтому, по формуле (2.1.2) конечная величина A_N определяется формулой:

$A_N = P(1 + rt)^N$.

Часто, эту формулу записывают в виде

$$A_N = P(1 + k)^N, \quad \text{где} \quad k = rt.$$

Пример 3

Как лучше вложить деньги на 9 месяцев: под 16% при условии начисления интереса ежеквартально или под 16,4% простого интереса?

Решение

При первом варианте, на каждый вложенный сом мы получим

$1\cdot(1 + 0,16\cdot(3/12))^3 = 1,125$ сомов. (Здесь (3/12) – длительность квартала в годах, 3 – число периодов (кварталов) в 9 месяцах.).

При втором варианте: $1\cdot (1 + 0,164\cdot(9/12)) = 1,123$ сомов.

То есть первый вариант выгоднее.

2.1.3. Будущее (накопленное) значение аннуита

Пример 4

Айгуль ежегодно вкладывает на счет по $500. Сколько денег будет на ее счете сразу после 3-го вклада, если ставка интереса 12%? [70, 36 с.]

Решение

После того как на первые $500 начислится интерес, на счет внесут вторые $500: *500(1+0,12) + 500 = $1060*. Затем, интерес будет начислен на *$1060* и *$500* будут внесены на счет в 3-й раз: *1060(1+0,12) + 500 = $1687,2*.

Полученное число называется <u>будущим (накопленным, конечным) значением аннуита</u>.

Следуя путем, описанным в примере 4 можно узнать, сколько денег будет на счете через 30 лет, 50 лет и так далее, но мало кто согласится проводить эти расчеты. К счастью, и особой нужды в этом нет.

Для того чтобы облегчить процесс вычисления будущего значения аннуита для случая большого количества вкладов, используем следующий подход:

Обозначим через x_n количество денег на счете сразу после вклада с номером n. Тогда, для того чтобы определить, сколько денег будет у Айгуль на счете сразу после N-го вклада, достаточно будет решить уравнение

$x_n = (1+0{,}12)\,x_{n-1} + 500$ с начальным условием $x_0 = 0$.

По формуле (2.1.2)

$$x_N = 0\cdot(1+0{,}12)^N + 500\frac{1-(1+0{,}12)^N}{1-(1+0{,}12)}.$$

В частности, сразу после 30-го вклада на счете будет

$$S_{30} = 500\frac{1-(1+0{,}12)^{30}}{1-(1+0{,}12)} = 500\frac{(1+0{,}12)^{30}-1}{0{,}12} = \$120665.$$

<u>Определение</u>

Будущим (накопленным, конечным) значением аннуита (*Future value of annuity*) называется сумма $\boldsymbol{FVA}$, которая будет накоплена на счете при ставке интереса $\boldsymbol{r}$, если в каждом из N периодов длиной t будет делаться одинаковый вклад величиной $\boldsymbol{F}$.

Повторив рассуждения, использованные при решении предыдущей задачи, можно получить формулу для вычисления будущего значения аннуита:

$$FVA = F\cdot\frac{(1+k)^N-1}{k};\quad k = r\cdot t.$$

<u>Пример 5</u>

Марина собирается купить колье за \$2190. Сколько времени ей понадобится на то чтобы собрать деньги, если она может откладывать по \$200 в конце каждого квартала? Интерес 8%

Так как в каждом квартале начисляется 2%, необходимое число периодов можно определить из равенства $2190 = 200\,\frac{(1 + 0{,}02)^N - 1}{0{,}02}$. Отсюда,

$0{,}219 + 1 = (1+0{,}02)^n$. Теперь, прологарифмировав полученное уравнение, найдем значение n: $n = \frac{\ln 1{,}219}{\ln 1{,}02} = 10$.

Ответ При указанных условиях колье можно будет купить через 10 кварталов, то есть 2,5 года.

2.1.4. Исходное значение аннуита

Определение.

Вклад величиной **PVA**, который будет исчерпан, после того как в конце каждого из N периодов длиной t со счета, на котором начисляется интерес по ставке $\boldsymbol{r}$, будет сниматься сумма $\boldsymbol{V}$, называется исходным (текущим) значением аннуита (*Present Value of Annuity*).

В соответствии с принципом рационального поведения, предполагаем, что деньги снимаются со счета, после того как на них будет начислен интерес.

Тогда, имеет место уравнение $x_n = (1+ rt)\, x_{n-1} - V$,

с условиями $x_0 = PVA$ и $x_N = 0$.

По формуле (2.1.2)

$$0 = x_N = PVA \cdot (1 + rt)^N - V\frac{(1+ rt)^N - 1}{rt}.$$

Решив это уравнение относительно PVA, получим

$$PVA = V\frac{1 - (1+ rt)^{-N}}{rt}.$$

Пример 6 ***Билл Гейтс жертвует миллиард***

Богатейший человек планеты и глава «Майкрософта» Билл Гейтс объявил о крупнейшей в истории благотворительной акции. Он выделяет 1 миллиард долларов в качестве стипендий для талантливых студентов из национальных меньшинств США. «Крайне важно для будущего Америки обратиться ко всем ресурсам талантов и способностей, чтобы воспитать будущее поколение лидеров», - заявил Билл Гейтс во время пресс-конференции, посвященной этому событию. В течении ближайших 20 лет он будет платить по 50 тысяч долларов *тысяче одаренных выпускников школ США, которые в силу материального положения их семей не могли бы продолжить образование в вузе. Гейтс, родившийся в бедной семье, сегодня может позволить себе подобную благотворительность. Его состояние оценивается в 90 миллиардов долларов, и процветающий «Майкрософт» приносит его шефу около 5 миллионов долларов в час.* (Из газет. Сентябрь 1999 г.)

Итак, по 50 тысяч долларов тысяче выпускников — всего 50 млн. долларов в год, 50 млн. в каждый из 20 лет — получается миллиард. Означает ли это то, что состояние Гейтса теперь должно оцениваться в 89 миллиардов долларов? Конечно — нет. В данной ситуации, мы имеем дело со стандартной задачей на исходное значение аннуита.

Для того чтобы выполнить свое обещание Гейтсу достаточно выделить: $50(1 - (1 + 0{,}07)^{-20})/0{,}07 = 50 \cdot 10{,}594 = 529{,}7$ миллионов долларов при ставке интереса 7%. Конечно, это не миллиард, но и за эту сумму имеет смысл сказать Гейтсу большое спасибо и выразить надежду, на то, что несмотря на некоторое уменьшение состояния, он не прекратит заниматься благотворительностью. Кроме того, еще раз обращаем внимание на то, как, используя идею исходного значения аннуита, можно сделать красивый жест.

2.1.5. Приведем еще несколько примеров. Конечно, эти задачи можно решать стандартным образом, используя формулы для вычисления PVA, FVA и т.п. Но легко убедиться в том, что использование разностных уравнений заметно упрощает дело.

<u>Пример 7</u>

Канат может купить оборудование за $6000 или же получить его на условиях лизинга, заплатив сразу $2000, и выплачивая по $1000 в конце каждого из пяти лет. Какой вариант предпочтительнее, если ставка интереса:

а) 7%; *б) 10%?* [75, 75 с.]

(Лизинг - вид долгосрочной аренды. В данном случае предполагается, что арендатор становится владельцем оборудования после последней выплаты.)

Нетрудно понять, что имеет место альтернатива: отдать сразу $4000 или выплачивать по $1000 в конце каждого из пяти лет. Для того чтобы выбрать лучший вариант будем действовать следующим образом: условно, вложим на счет $4000, и будем в конце каждого года снимать с него по $1000. Если после 5-го изъятия на счете останутся деньги, то выгоднее получить оборудование его на условиях лизинга, если же получим отрицательное число, что указывает на необходимость внесения дополнительного количества денег, то лучше купить сразу.

Для того чтобы составить разностное уравнение, нужно увидеть, что в каждом периоде на деньги, лежащие на счете, накручивается интерес, а в конце каждого периода снимается $1000.

Поэтому, если x_n – это количество денег на счете в конце года с номером n, то имеет место уравнение $x_n = (1 + k)\, x_{n-1} - 1000,$

с начальным условием $x_0 = 4000.$

Его решение, из формулы (2.1.2),

$$x_5 = (1+k)^5 \cdot 4000 - 1000\frac{1-(1+k)^5}{1-(1+k)} .$$

Взяв $k = 7\%$, получим, что $x_5 = -140{,}3$. Следовательно, в этом случае выгоднее купить сразу.

Следовательно, если ставка интереса равна 7%, то выгоднее купить за $4000, потому что для обеспечения выплат по договору о лизинге, кроме $4000 в начальный момент, нужно будет затратить еще $140, 3 для обеспечения послдней выплаты.

При ставке интереса 10% выгоден лизинг, так как для обеспечения условий договора о лизинге, достаточно положить на счет $3790,8.

Пример 8

По мнению Заремы, для покупки нового оборудования для пансионата, через 7 месяцев потребуется 5000 евро. Сколько денег нужно вносить на счет в конце каждого месяца, для того чтобы собрать требуемую сумму, если ставка 12%, а в начальный момент времени на счете была 1000 евро? [75, 77 с.]

Решение

Для того чтобы выписать соответствующее разностное уравнение нужно определить, что происходит в течение каждого отдельного периода времени.

В данном случае, период времени месяц;
к концу месяца деньги, имеющиеся на счете в начале, увеличатся в
$(1+ 0{,}12\cdot(1/12)) = (1 + 0{,}01)$ раз, а затем к ним будут добавлены b евро.

Поэтому, если x_n – это количество денег на счете в конце месяца с номером n, то имеет место уравнение $x_n = (1 + 0{,}01)\, x_{n-1} + b,$
и условия $x_0 = 1000;$ $x_7 = 5000.$

Тогда, из формулы (2.1.2) следует, что

$$5000 = (1 + 0{,}01)^7 \cdot 1000 + b\frac{1 - (1+0{,}01)^7}{1 - (1+0{,}01)}.$$

Отсюда, $b = 3927{,}9 / 7{,}2153 = 544{,}52$ евро

Пример 9

Канайым может купить оборудование за \$4500 и перепродать его через 5 лет за \$300 или же арендовать его, выплачивая по \$1000 в начале каждого из пяти лет. Какой вариант предпочтительнее, если ставка интереса:

а) 7%; *б) 10%?* [75, 78 с.]

Решение

Для того чтобы выбрать лучший вариант, условно, вложим на счет \$4500, при ставке интереса k, и будем снимать с него деньги для проведения арендных платежей. Если, в результате, к концу срока на счете останется больше чем \$300, то выгодней аренда, если же меньше \$300, то покупка.

Для того чтобы составить разностное уравнение, из условий задачи получаем, что в начале каждого периода со счета снимается \$1000, а оставшаяся сумма лежит на счете 1 год и на нее накручивается интерес.

Поэтому, $x_n = (x_{n-1} – 1000)\,(1 + k) = x_{n-1}\,(1 + k) – 1000(1 + k).$

Следовательно, через 5 лет, на условном счете, согласно формуле (2.1.2) будет $x_5 = (1 + k)^5 \cdot 4000 - 1000(1 + k)\frac{1 - (1 + k)^5}{1 - (1 + k)}.$

Подставив вместо k число 0,07, получим $x_5 = 158{,}45$, что означает выгодность покупки в случае, когда ставка интереса 7%.

В случае, когда ставка интереса 10% на счете останется $x_5 = 531{,}64$. Это число указывает на предпочтительность аренды.

<u>Пример 10</u>

Люба получила в кредит $3000 под 16% ставки дисконта. Для погашения кредита, в конце каждого года, она отдает по $700.

Какова величина ее долга сразу после 7-й выплаты? [75, 79 с.]

<u>Решение</u>

Так как речь идет о ставке дисконта, следует воспользоваться формулой $A = P/(1 - r_d\, t)$. Тогда, линейное разностное уравнение, описывающее изменения величины долга запишется в виде

$$x_n = \frac{1}{1 - 0{,}16}\, x_{n-1} - 700,$$

где x_n – это долг в конце года с номером n.

Так как, $1/0{,}84$ приблизительно $1{,}19$, из формулы (2.1.2), решение уравнения,

$$x_7 = (1{,}19)^7 \cdot 3000 - 700\frac{1 - (1{,}19)^7}{1 - 1{,}19} = 10166 - 8801 = 1365.$$

2.1.6. Оценка стоимости облигаций.

В финансовом менеджменте, теории инвестиций и других, близких к ним курсах, весьма популярны задачи на определение стоимости облигации и доходности вложений в облигации.

Облигация – это долгосрочная ценная бумага, показывающая что, юридическое лицо, выпустившее облигацию (эмитент), является должником владельца облигации.

При выпуске облигации указывается срок ее погашения, номинальная стоимость и купонная ставка. Для того чтобы расплатится, эмитент обязан производить в конце каждого полугодия (года и т. п.) купонные выплаты, а в конце срока действия облигации, погасить ее, выплатив владельцу облигации номинальную стоимость.

Купонные выплаты определяются по следующей схеме: номинальная стоимость облигации умножить на купонную ставку и разделить на число выплат в год. Например, если купонная ставка 12%, номинальная стоимость облигации \$1000, в конце каждого полугодия производятся купонные выплаты, то владелец облигации будет в конце каждого полугодия получать по $\frac{\$1000 \cdot 0{,}12}{2} = \$60$.

Пример 11

Вам предлагают купить за \$988 облигацию, которая имеет номинальную стоимость \$1000, ежегодные купонные выплаты исходя из ставки 11%, будет погашена через 12 лет. Как Вы должны поступить, если на деньги, вложенные в облигации, вы надеетесь получать не менее 9% дохода? [70, 51 с.]

Решение

Хватайте!!! Вложив \$988 под 9%, Вы в течение 12 лет ежегодно можете получать по \$88,92 и \$988 через 12 лет. Купив за те же деньги облигацию, Вы будете иметь по \$110 ежегодно и \$1000 через 12 лет.

Пример 12

Оцените стоимость облигации, описанной в предыдущем примере.

Решение

Заплатив сумму P при покупке облигации, через год можно получить \$110, еще \$110 через два года и так 12 раз. После этого, облигация будет погашена с одновременной выплатой \$1000. Другими словами, вложив сумму P в виртуальный банк «Облигация» под 9% интереса и снимая со счета \$110 в конце каждого года, сразу после 12-го изъятия Вы будете иметь на счете \$1000.

Соответственно, если через x_n обозначить количество Ваших денег в банке «Облигация» в конце года с номером n, то имеет место уравнение

$$x_n = (1 + 0{,}09)\, x_{n-1} - 110.$$

Тогда, из формулы (2.1.2)

$$1000 = x_{12} = (1{,}09)^{12} \cdot P - 110\frac{1-(1{,}09)^{12}}{1-(1{,}09)} .$$

Отсюда, $$1000 = 2{,}8127 \cdot P - 110 \cdot 20{,}141.$$

Следовательно, оценочная стоимость облигации *$1143,21*.

Пример 13

Облигация будет погашена через 10 лет, имеет номинальную стоимость $1000, предусматриваются 2 купонные выплаты в год, исходя из ставки 11%. Оцените стоимость облигации, если ожидаемая доходность в 1- 3 годы 12% , далее 10%?

Решение

На математическом языке, задача будет сформулирована следующим образом: Найти P из уравнения $x_n = (1 + 0{,}12\cdot 0{,}5)x_{n-1} - 110:2$,

при $x_0 = P$ и $x_6 = y_0$,

предварительно вычислив $x_6 = y_0$ из уравнения

$y_n = (1 + 0{,}10\cdot 0{,}5)y_{n-1} - 110:2$, при $y_{14} = 1000.$,

Воспользовавшись формулой (2.1.2) получим, что

$$1000 = (1+0{,}05)^{14} y_0 - 55\frac{1 - (1 + 0{,}05)^{14}}{1 - (1 + 0{,}05)}.$$

Отсюда, $y_0 = 1049{,}5$.

Повторив процесс нахождения начального значения

$$1049{,}5 = (1 + 0{,}06)^6 x_0 - 55\frac{1 - (1+ 0{,}06)^6}{1 - (1 + 0{,}06)},$$

получим, что $x_0 = P = \$1010{,}34$.

Пример 14

Наряду с обычными облигациями, на рынке ценных бумаг обращаются и бескупонные облигации. Оценим бескупонную облигацию, номинальная стоимость, которой 800 евро, если ожидаемая доходность 8%, а до погашения 9 лет.

Решение 400 евро получается из уравнения $x_n = (1 + 0{,}08)x_{n-1}$,

и условия $x_9 = 800$. Отметим, что в данном случае, для получения ответа можно воспользоваться правилом 72.

2.1.7. Доходность облигации к погашению

Зная оценочную стоимость облигации, инвестор может принять решение о том, стоит ли покупать облигацию. Но гораздо чаще, решение об инвестировании принимается исходя из сравнения доходностей, которые может принести тот или иной вид финансовых активов.

Поэтому, весьма актуальной является задача определения ставки интереса, по которой получит ежегодный доход инвестор, купивший облигацию по рыночной цене.

Эта величина называется доходность к погашению - Yield to Maturity.

Пример 15

Оценить доходность к погашению бескупонной облигации, номинальная стоимость, которой 700 евро, если она продается по цене 263 евро, а до погашения 7 лет. [75, 117 с.]

Решение получается из уравнения $x_n = (1 + k)\, x_{n-1}$, и условий $x_0 = 263$, $x_9 = 700$. Воспользовавшись (2.1.2) и разделив 700 на 263, получим $(1 + k)^7 = 2{,}6616$. Отсюда, $k = 15\%$.

Задача определения доходности к погашению для обычных облигаций несколько сложнее, и об этом будем говорить далее.

Облигации, которые продаются по цене меньшей, чем номинальная стоимость облигации, называются дисконтными. Если же цена облигации больше номинальной, то имеет место облигация с премией.

Купонная ставка показывает, сколько процентов дохода будет иметь лицо, купившее облигацию по номинальной стоимости. Несложно увидеть, что оценочная стоимость облигаций должна быть ниже номинальной, если купонная ставка ниже ставки желаемого дохода. Если же купонная ставка выше ставки желаемого дохода, то оценочная стоимость облигаций должна быть выше номинальной.

Пример 16

Вернемся к условиям примера 10, и оценим доходность к погашению, который будет иметь инвестор, купивший облигацию за $988.

Решение

Как отмечалось ранее, в случае, когда купонная доходность совпадает с ожидаемой, оценочная стоимость облигации равна номинальной.

Следовательно, используя результаты примера 2, мы имеем две пары данных:
при ожидаемой доходности 11% оценочная стоимость облигации равна $1000;
при ожидаемой доходности 9% оценочная стоимость облигации равна $1143,21.

Далее, отметив, что разница между $988 и $1000 относительно мала, предположим, что между ожидаемой доходностью и оценочной стоимостью облигации имеет место линейная зависимость, что неверно, но для приближенных вычислений годится. В результате, можно определить доходность, соответствующую стоимости $988.:

Если доходность k и стоимость P облигации связаны выражением $k = aP + b,$ то имеет место система $\begin{cases} 11 = a\cdot 1000 + b, \\ 9 = a\cdot 1143{,}21 + b. \end{cases}$

Решив систему, и подставив в получившуюся линейную функцию $k = -0{,}014P + 24{,}9665$ интересующее нас значение 988, получим $k = 11{,}1345\%.$

Стоит еще раз отметить, что полученный ответ является приближенным. Для того чтобы получить более точное значение, то достаточно повторить процедуру: предполагая, что ожидаемая доходность 11,1345%, так же как в примере 9 подсчитать оценочную стоимость облигации (получится $991,3) и взяв полученную пару данных вместе с ближайшей (в данном случае 11% и $1000) решить систему и вычислить доходность соответствующую $988.

§2.2. Модели оценки стоимости акций

2.2.1. Сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Если $|q| < 1,$ то при n стремящемся к бесконечности, формула для определения суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (2.2.1)$$

принимает следующий вид:

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (2.2.2)$$

Число S называется суммой членов бесконечно убывающей прогрессии.

Рассуждения, которые привели к формуле (2.2.2) справедливы и в случае, когда при использовании схемы PVA, имеют место очень большое количество выплат.

Пример 1

Как Вы отнесетесь к следующей пенсионной схеме: в течение 10 лет Вы ежемесячно будете вносить по 100 сомов, а в каждый последующий за этими 10 годами месяц Вам или Вашим наследникам будут выплачивать по 300 сомов?

Решение

Все зависит от ставки интереса, под которую Вы можете инвестировать свои деньги. Самый простой вариант – вложить в банк. К примеру, если Вы имеете возможность вкладывать деньги на счет под 24% интереса, с условием ежемесячной капитализации (по *24% : 12 = 2%* в месяц), то, вкладывая в конце каждого месяца по 100 сомов на этот счет, через 10 лет (= 120 месяцев) Вы будете иметь

$$100\frac{(1+0{,}02)^{120}-1}{0{,}02}=48824{,}8 \text{ сомов.}$$

Далее, так как в условиях задачи ничего не говорится о сроке, в течение которого будут сниматься деньги и упоминаются наследники, то нужно понимать, что деньги будут сниматься бесконечно долго.

Тогда, при очень больших значениях N, формула для вычисления исходного значения аннуита

$$PVA=V\,\frac{1-(1+rt)^{-N}}{rt} \qquad (2.2.3)$$

приобретет следующий вид:

$$PVA=V\cdot\frac{1}{rt}. \qquad (2.2.4)$$

Поэтому $48824{,}8=V\cdot\dfrac{1}{0{,}24\cdot 1/12}$, и отсюда следует, что с суммы $48824{,}8$ можно ежемесячно снимать $48824{,}8\cdot 0{,}02=976{,}5$ сомов.

Может показаться, что ситуация, описанная в примере 2, надуманная – *бесконечных выплат не бывает.* Но это не так. Существуют финансовые активы, по которым предусматриваются выплаты в течение неограниченного промежутка времени. Бессрочные фиксированные платежи называются консолями.

Пример 2

Чинаре за 150 фунтов стерлингов предлагают купить консоль, по которой в конце каждого года будет выплачиваться 10 фунтов стерлингов. Стоит ли ей покупать?

Ответ зависит от инвестиционных возможностей Чинары — ожидаемой доходности.

Например, если она имеет возможность получать доход, равный 10% ставки интереса, то вложив 150 фунтов стерлингов, она может в конце каждого года снимать по 15 фунтов стерлингов. В то же время, если ее возможности ограничиваются 5%, то ей стоит купить консоль.

Для того чтобы определить «справедливую» стоимость консоли, предположим, что имеют место n выплат. Тогда, имеет место схема PVA и по формуле (2.2.3): $P = 10\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$. «Отправив» n в бесконечность, получим, что оценочная стоимость консоли P равна: $P = 10 \cdot \frac{1}{r}$, где r – ставка интереса, соответствующая ожидаемой для Чинары доходности.

В частности, если $r = 10\%$, то $P = 100$, а если $r = 5\%$, то $P = 200$.

2.2.2. Оценка акций с постоянными дивидендами

Одной из наиболее распространенных задач на рынке ценных бумаг является задача определения оценочной стоимости акций (*Stocks valuation*).

Стоит сразу отметить, что цена акции, как и цена любого блага на рынке, определяется в результате взаимодействия спроса и предложения.

Наша задача – предложить механизм, позволяющий принять решение о покупке или продаже акции.

Для этого будет использоваться метод оценки актива по потоку будущих доходов – то есть, полагаем, что оценочная стоимость актива равна сегодняшней стоимости будущих доходов, которые обеспечивает владение активом.

Для грубых оценок достаточно предположить, что величина дивидендов по акции и ставка интереса неизменны. В этой ситуации - ситуации предполагающей неограниченное число выплат, оценочная стоимость акции (P), величина дивиденда (D), которые выплачиваются в конце каждого периода длиной (t) и ставка интереса (r) будут связаны соотношением

$$P = \frac{D}{1+k} + \frac{D}{(1+k)^2} + \frac{D}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D}{(1+k)^n} + \ldots \quad k = rt$$

Так как, ставка интереса положительна, мы имеем убывающую геометрическую прогрессию. Эта же ситуация рассматривалась при определении оценочной стоимости консоли.

Следовательно, цена акции определяется формулой:

$$P = \frac{D}{k}. \qquad k = rt \qquad (2.2.5)$$

Пример 3

Оцените акцию, дивиденды по которой в размере 50 сомов выплачиваются в конце каждого полугодия, если ставка интереса 38%, зная, что дивиденды выплачены накануне. [70, 59 с.]

Решение

Напоминаем, что, говоря о ставке интереса, мы имеем в виду ставку дохода, который мы ожидаем получать ежегодно на средства, вложенные в акцию:

$P = 50/(0,38 \cdot 0,5) = 263,16$ сомов.

Прокомментируем ответ: 263,16 сомов – это сумма, достаточная, для того чтобы вложить ее в банк под 38% и иметь возможность снимать в конце каждого полугодия 50 сомов с этого счета, в течение сколь угодно длительного промежутка времени. Проследим механизм: 263,16 сомов через полгода дадут $263,16(1+0,38 \cdot 0,5) = 313,16$ сомов. После того как снимем 50 сомов, на счете останется 263,16 сомов. В последующие полгода они снова принесут интерес 50 сомов и так до бесконечности.

Описанная схема используется и при оценке стоимости земли, недвижимости и т.п. . Оценочная стоимость актива соответствует P в формуле (2.2.5), а символ D в этой формуле соответствует арендной плате – ренте.

Пример 4

Оцените стоимость участка земли, если годовая рента, выплачиваемая в конце года, составляет 60 млн. рублей, а ставка интереса 120%.

Решение

Стоимость определим исходя из формулы (2.2.5): $60/1,2 = 50$ млн. рублей. Отметим кажущуюся абсурдность ситуации. Участок с годовой арендной платой 60 млн., можно купить в вечное пользование за 50 млн. рублей.

Все дело в том, что деньги за покупку надо платить сразу, в начале года, а ренту в конце года. Кроме того, ставка интереса очень высока.

Так как $50(1+1,2) = 110$ млн. к концу года, вложив 50 млн. рублей при ставке интереса 120%, мы можем ежегодно снимать по 60 млн. для того, чтобы заплатить за аренду, оставляя 50 млн. на счете.

Пример 5

Оцените акцию, дивиденды по которой в размере 27 сомов выплачиваются в конце каждого квартала, если ставка интереса 36%, зная, что очередные дивиденды выплачены: a) месяц назад; b) будут через месяц. [70, 59 с.]

Решение

a) Напоминаем, что по формуле (2.2.5) определяем оценочную стоимость акции сразу после выплаты очередных дивидендов.

Поэтому месяц назад справедливая цена акции была

$\dfrac{27}{0,36 \cdot (1/4)} = 300.$ Сейчас акция стоит $300(1 + 0,36 \cdot \dfrac{1}{12}) = 309,$ так как предполагается, что деньги должны расти со «скоростью» 36% в год.

b) Если дивиденды в следующий раз будут выплачены через месяц, то предыдущие были выплачены 2 месяца назад, и (см. пункт а) тогда акция была оценена в 300 сомов. За 2 месяца оценочная стоимость акции выросла, и теперь равна $300(1 + 0{,}36 \cdot \frac{2}{12}) = 318$.

Пример 6

Определите доходность инвестиции в акцию, которая была куплена за 45 евро, если через год были получены дивиденды в размере 2,2 евро, и еще через год, после получения дивидендов в размере 15 евро, она была продана за 43 евро.

Решение

Обозначим, соответствующую ставку интереса через r.

Тогда, согласно принципу оценки актива через поток будущих доходов $45 = \frac{2{,}2}{(1+r)} + \frac{15+43}{(1+r)^2}$. Решив это уравнение, получим, что доходность инвестиции в данную акцию равна 16%.

2.3.3. Оценка акций с геометрическим ростом дивидендов

Предположение о том, что величина дивидендов по акции остается неизменной является слишком нереалистичной. В связи с этим, предложим модель оценки акций, по которым дивиденды возрастают на один и тот же процент за период (*constant growth stocks valuation*).

В этой ситуации стоимость акции (P), величина дивидендов (D_0), которые были выплачены накануне оценки акции, процент роста дивидендов (g) и ставка интереса (r) будут связаны соотношением

$$P = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k)^n} + \ldots = \quad (k = rt)$$

$$= \frac{D_0(1+g)}{1+k} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+k)^n} + \ldots . \quad (2.2.6)$$

При $g < k$ имеем убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1+g}{1+k}$. Поэтому,

$$P = \frac{D_0(1+g)}{1+k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+k}} = \frac{D_0(1+g)}{1+k} \cdot \frac{1}{\frac{(1+k)-(1+g)}{1+k}} = \frac{D_0(1+g)}{k-g}.$$

Итак, цена акции, при условии постоянного геометрического роста дивидендов, определяется формулой:

$$P = \frac{D_0(1+g)}{k-g}. \qquad (2.2.7)$$

Так как $D_0(1 + g) = D_1$, формулу (2.2.7) можно записать в виде

$$P = \frac{D_1}{k-g}. \qquad (2.2.7а)$$

<u>Замечание</u>

Формула (2.2.7) работает только при темпах роста g меньших, чем ожидаемая доходность r. В противном случае получается, что дивиденды по акции, то есть доходы, которые будет получать владелец акции, будут расти быстрее, чем он ожидает. За такую акцию можно отдать любое количество денег. Но, к сожалению, такие акции возможны только теоретически.

<u>Пример 7</u>

Алие, на день рождения, за 200 сомов продвинутые родители купили акцию, по которой накануне были выплачены дивиденды в размере 40 сомов, выплачиваемые 1 раз в год. Какова ожидаемая доходность, если предполагается, что дивиденды ежегодно будут расти на 20%? Сколько будет стоить, при прочих равных условиях, эта акция через полгода? Через год? [75, 132 с.]

<u>Решение</u>

По формуле (2.2.7), $200 = \dfrac{40(1+0,2)}{r-0,2}$. Отсюда, $r = 88:200 = 0,44.$ Следовательно, ожидаемая доходность 44%.

Если ожидаемая доходность 44%, то 200 сомов через полгода должны превратиться в $200(1 + 0,44 \cdot 0,5) = 244$.

Через год, перед выплатой дивидендов, акция будет стоить $200(1 + 0,44 \cdot 1) = 288$, а после выплаты дивидендов: $288 – 48 = 240$ сомов.

$(48 = 40(1 + 0,20)$ *– это дивиденды, которые будут выплачены через год)*

К такому же результату можно прийти другим образом: в текущем году сумма 200 сомов заплаченная за акцию порождает поток выплат

$$\frac{40(1+0{,}2)}{1+r}+\frac{40(1+0{,}2)^2}{(1+r)^2}+\frac{40(1+0{,}2)^3}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{40(1+0{,}2)^n}{(1+r)^n}+\ldots\ .$$

При сохранении условий, акция, приобретаемая через год, порождает поток (*все слагаемые увеличились в (1+ 0,2) раз*)

$$\frac{40(1+0{,}2)^2}{1+r}+\frac{40(1+0{,}2)^3}{(1+r)^2}+\frac{40(1+0{,}2)^4}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{40(1+0{,}2)^{n+1}}{(1+r)^n}+\ldots\ .$$

Поэтому, акция через год будет стоить в ($1+ 0{,}2$) раза больше:
$200(1+ 0{,}2) = 240$ сомов.

<u>Пример 8</u>

Стоит ли покупать за 306 сомов акцию, по которой через полгода будут выплачены дивиденды 20 сомов, если ожидаемый рост дивидендов выплачиваемых раз в год 15%, а ожидаемая доходность 22%? [75, 133 с.]

<u>Решение</u>

Полгода назад, сразу после выплаты дивидендов, согласно формуле (2.2.7а), оценочная стоимость акции была равна

$$\frac{20}{0{,}22-0{,}15}=285{,}7.$$ *(Обратите внимание, 20 это D_1.)*

Следовательно, сейчас ее оценочная стоимость $285{,}7(1 + 0{,}22\cdot 0{,}5) = 317$.

Для человека, который считает, что дивиденды будут расти на 15% в год и готов довольствоваться доходностью 22%, покупка указанной акции является выгодным вложением денег.

<u>Пример 9</u>

Назгуль предлагает Салтанат купить за 200 сомов акцию фирмы «Малаке», по которой накануне были выплачены дивиденды в размере 10 сомов. Будут ли они покупать эту акцию, если ожидаемая доходность 20%, предполагается, что в первые 5 лет дивиденды ежегодно будут расти на 25%, а в последующие годы на 10%? [75, 134 с.]

<u>Решение</u>

Для того чтобы оценить акцию, приравняем цену акции к предполагаемому денежному потоку:

$$P = \frac{10(1+0,25)}{(1+0,2)} + \frac{10(1+0,25)^2}{(1+0,2)^2} + \frac{10(1+0,25)^3}{(1+0,2)^3} + \frac{10(1+0,25)^4}{(1+0,2)^4} + \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5}$$
$$+ \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5} \cdot \frac{(1+0,1)^1}{(1+0,2)^1} + \ldots + \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5} \cdot \frac{(1+0,1)^n}{(1+0,2)^n} + \ldots \ .$$

Величину P найдем, представив ее в виде суммы двух выражений, P_1 и P_2:

$$P_1 = \frac{10(1+0,25)}{(1+0,2)} + \frac{10(1+0,25)^2}{(1+0,2)^2} + \frac{10(1+0,25)^3}{(1+0,2)^3} + \frac{10(1+0,25)^4}{(1+0,2)^4} + \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5};$$

$$P_2 = \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5} \cdot \frac{(1+0,1)^1}{(1+0,2)^1} + \ldots + \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5} \cdot \frac{(1+0,1)^n}{(1+0,2)^n} + \ldots \ .$$

Число P_1 является суммой 5-ти членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1+0,25}{1+0,2}$ и первым членом $\frac{10(1+0,25)}{1+0,2}$. Поэтому, $P_1 = 56,61$.

Число P_2 можно найти по формуле (2.2.7) при D_0 равном $\frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5}$.

Отсюда, $P_2 = \frac{10(1+0,25)^5}{(1+0,2)^5} \cdot \frac{(1+0,1)}{0,2-0,1} = 134,91$.

Следовательно, оценочная стоимость акции равна $56,61 + 134,91 = 191,52$ сомов, и так как её предлагают купить за 200 сомов, акция не будет куплена.

Продолжим говорить об оценке акций, воспользовавшись материалами работы, написанной в 2012 году. Несмотря на время, прошедшее с тех пор, на наш взгляд, все сказанное тогда является актуальным и сегодня [74].

Приведем цитату из книги Добрецовой Н.Н. ***Романтика капитала:***

- *Шамиль Атаханов хорошо понимал, что развитие реальной экономики должно базироваться на внутренних инвестициях, для чего должна заработать цепочка из трех составляющих: доходов, сбережений и инвестиций. И то, что у нас эта цепочка разорвана, заставляет нас судорожно цепляться за иностранных инвесторов, в то время как внутри страны остаются незадействованными в экономике сотни миллионов долларов. И продолжают гулять в мозгах миф об иностранном инвесторе, который придет и решит все наши проблемы. Не придет. А если придет, то не решит.* [55].

Страна может стать великой, если она богата и свободна. Насколько Кыргызстан свободен, можно еще рассуждать, а до богатства нам далеко.

Развитие экономики является наиболее важной задачей для Кыргызстана. А эта задача не разрешима без развития финансового сектора. Бизнес не может нормально развиваться не имея доступа к кредитам.

Что имеет место на сегодняшний день?

*По критерию легкости получения кредитов Кыргызстан занял 129 место в очередном отчете конкурентоспособности экономики (*Global Competitiveness *Index 2010-2011) в 139 странах мира, подготовленном* World Economic Forum *(Всемирным Экономическим Форумом).* [115]

Комментарии видимо излишни. Бюрократические препоны при получении кредитов только подчеркивают основную проблему – высокую цену кредитов. Приведем еще одну ссылку. По сообщению агентства «24.kg» от 6.10.2011 *заместитель председателя правления Национального банка КР Заир Чокоев заявил, что Нацбанк Кыргызстана не может влиять на размер процентной ставки по кредитам в комбанках, но намерен решать эту проблему. «Говорить о снижении процентной ставки по кредитам можно только при условии, что на рынке будет конкуренция. В КР концентрация очень высокая. Несколько банков являются крупными кредиторами в экономике. Ожидать, что сегодня или завтра ставки быстро снизятся, не стоит. Это тяжелый вопрос, ведь мы не можем диктовать банкам свои условия», - подчеркнул чиновник.*

Вызывает удивление утверждение, что Нацбанк не может влиять на коммерческие банки.

Итак, одна из причин высокой стоимости кредитов это отсутствие конкуренции в банковском секторе. Это усугубляется тем, что в свою очередь банковский сектор не испытывает конкуренции.

Еще одна цитата из книги *Романтика капитала: - Ш. Атаханов вообще убежден во вредности большинства иностранных консультаций. Он считает, что еще в 1994 году мы допустили стратегическую ошибку, послушавшись иностранных советов и переместив центр тяжести финансового рынка в* *банковский сектор. Кстати, его убеждение подкрепляется мировой статистикой, согласно которой банковский сектор в странах с уравновешенной экономикой занимает не более тридцати процентов финансового рынка.* -

-*У нас же коммерческие банки оттянули на себя больше девяноста процентов финансового рынка, а ценным бумагам достаются крохи – менее десяти процентов.* – [55]

Из сказанного следует, что развитие других, небанковских секторов финансового рынка: пенсионных фондов, рынка ценных бумаг и т.п. является весьма актуальным на сегодняшний день.

Развитие рынка ценных бумаг неразрывно связано с ознакомлением потенциальных участников этого рынка с моделями, позволяющими принять решение о покупке или продаже акции — моделями оценки стоимости акций.

2.2.4. Оценка акций с арифметическим ростом дивидендов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели две самые хорошо известные и простые модели:

модель с постоянными дивидендами

$$P = \frac{D}{k}. \qquad k = rt \ , \qquad (2.2.5)$$

и модель оценки акций, по которым дивиденды возрастают на один и тот же процент за период

$$P = \frac{D_0(1+g)}{k-g}. \qquad (2.2.7)$$

Для получения формул (2.2.5) и (2.2.7) не обязательно использоваться формулой (2.2.4). Достаточно знать, что оценочная стоимость акции существует. Продемонстрируем это.

Пусть $P = \frac{D}{1+k} + \frac{D}{(1+k)^2} + \frac{D}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D}{(1+k)^n} + \ldots$.

Выделим 1-ое слагаемое, и перепишем равенство в виде

$$P = \frac{D}{1+k} + \frac{1}{1+k}\left[\frac{D}{1+k} + \frac{D}{(1+k)^2} + \frac{D}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D}{(1+k)^n} + \ldots \right]$$

Выражение внутри квадратных скобок равно P.

Следовательно, имеет место равенство $P = \dfrac{D}{1+k} + \dfrac{1}{1+k}P.$

Отсюда, $P(1 + k) = D + P$ и $P = \dfrac{D}{k}.$

Такие же соображения позволяют получить из равенства

$$P = \frac{D_0(1+g)}{1+k} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+k)^n} + \ldots .$$

формулу (2.2.7): Перепишем P в виде

$$P = \frac{D_0(1+g)}{1+k} + \frac{1+g}{1+k}\left[\frac{D_0(1+g)}{1+k} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+k)^n} + \ldots\right].$$

Так как выражение внутри квадратных скобок равно P, имеет место равенство $P = \dfrac{D_0(1+g)}{1+k} + \dfrac{1+g}{1+k}P$.

Отсюда $P(1 + k) = D_0(1 + g) + (1 + g)P$, и $P = \dfrac{D_0(1+g)}{k-g}.$

Используем предложенный метод для получения <u>оценки акций с арифметическим ростом дивидендов.</u>

Пусть, накануне по акции выплачены дивиденды в размере D_0. Предполагается, что в конце каждого последующего периода величина дивидендов будет расти на число d.

Оценив эту акцию по потоку будущих доходов, получим

$$P = \frac{D_0+d}{1+k} + \frac{D_0+2d}{(1+k)^2} + \frac{D_0+3d}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0+nd}{(1+k)^n} + \ldots . \qquad (2.2.8)$$

Перепишем (2.2.8) в виде

$$P = \frac{D_0+d}{1+k} + \frac{1}{1+k}\left[\frac{D_0+2d}{1+k} + \frac{D_0+3d}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{D_0+nd}{(1+k)^{n-1}} + \ldots\right].$$

Каждую дробь, стоящую внутри квадратных скобок разобьем на две:

$$[\ldots] = \left[\left(\frac{D_0+d}{1+k}+\frac{d}{1+k}\right)+\left(\frac{D_0+2d}{(1+k)^2}+\frac{d}{(1+k)^2}\right)+\ldots+\left(\frac{D_0+(n-1)d}{(1+k)^{n-1}}+\frac{d}{(1+k)^{n-1}}\right)+\ldots\right].$$

Сумма 1-х слагаемых, стоящих внутри круглых скобок равна P, а сумма 2-х, по формуле (2.2.5), равна d/k.

Поэтому, имеет место равенство $P=\frac{D_0+d}{1+k}+\frac{1}{1+k}\left[P+\frac{d}{k}\right]$.

Отсюда, $P(1 + k) = D_0 + d + P + \frac{d}{k}$, и $Pk = D_0 + d + \frac{d}{k}$.

Итак, мы получили формулу для оценки акций с арифметическим ростом дивидендов:

$$P=\frac{D_0+d}{k}+\frac{d}{k^2}. \qquad (2.2.9)$$

Пример 10

Оценить акцию, по которой накануне были выплачены дивиденды 27 сомов, если предполагается, что дивиденды, выплачиваемые раз в год, будут каждый раз увеличиваться на 6 сомов, а ожидаемая доходность 20%?

Решение Согласно формуле (2.2.9), оценочная стоимость акции равна

$$P=\frac{27+6}{0,2}+\frac{6}{0,2^2}=165+150=315.$$

2.2.5. Оценка акций со «ступенчато-арифметическим» ростом дивидендов

Закономерен вопрос: Насколько реальны рассмотренные модели?

Другими словами: Бывают ли акции, по которым дивиденды постоянны; имеют геометрический или арифметический рост; …?

По всей видимости, акций, по которым дивиденды всегда постоянны, или в точности являются членами геометрической прогрессии, …, не бывает. Но в то же время можно обнаружить акции, дивиденды по которым в течение достаточно длительного промежутка времени постоянны, ведут себя, примерно, как члены геометрической прогрессии и т.п..

Рассмотрим данные фирмы IBM. Дивиденды по ее акциям
(в долларах) выплачиваются 4 раза в год: в Марте, Июне, Сентябре и Декабре.

	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Март	*0,95*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*0,54*
Июнь	*0,95*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*0,54*
Сентябрь	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*0,25*
Декабрь	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,1*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*1,21*	*0,25*

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Март	*0,25*	*0,25*	*0,25*	*0,35*	*0,20*	*0,22*	*0,12*	*0,13*	*0,14*	*0,15*
Июнь	*0,25*	*0,25*	*0,35*	*0,40*	*0,22*	*0,24*	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*
Сентябрь	*0,25*	*0,25*	*0,35*	*0,20*	*0,22*	*0,12*	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*
Декабрь	*0,25*	*0,25*	*0,35*	*0,20*	*0,22*	*0,12*	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Март	*0,16*	*0,18*	*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*	*0,55*	*0,65*
Июнь	*0,18*	*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*	*0,55*	*0,65*	*0,75*
Сентябрь	*0,18*	*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*	*0,55*	*0,65*	*0,75*
Декабрь	*0,18*	*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*	*0,55*	*0,65*	

Можно заметить, что довольно долго, в 1984-1988, 1993-1996 годы дивиденды были постоянны.

Еще более интересное явление можно наблюдать, если вспомнить, что финансовый год в США начинается летом, пересмотреть таблицу и выделить два фрагмента:

	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004		2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009
Июнь	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*		*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*
Сентябрь	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*		*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*
Декабрь	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*		*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*
Март	*0,13*	*0,14*	*0,15*	*0,16*		*0,20*	*0,30*	*0,40*	*0,50*

Это наблюдение позволяет прийти к задаче оценки акций, которые имеют дивиденды, постоянные внутри финансового года и отличающиеся на число в соседние годы.

Итак, предположим, что по акции только что выплачены дивиденды в размере D_0. Предполагается, что в конце каждого из четырех последующих кварталов они будут равны $D_1 = D_0 + d$, затем, в следующие четыре квартала величина дивидендов будет $D_2 = D_1 + d = D_0 + 2d$, и так далее.

Тогда оценочная стоимость такой акции:

$$P = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_1}{(1+k)^2} + \frac{D_1}{(1+k)^3} + \frac{D_1}{(1+k)^4} + \frac{D_1+d}{(1+k)^5} + \ldots + \frac{D_1+d}{(1+k)^8} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^9} + \ldots .$$

Перепишем P в виде

$$P = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_1+d}{(1+k)^5} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^9} + \frac{D_1+3d}{(1+k)^{13}} + \ldots$$

$$+ \frac{D_1}{(1+k)^2} + \frac{D_1+d}{(1+k)^6} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^{10}} + \frac{D_1+3d}{(1+k)^{14}} + \ldots$$

$$+ \frac{D_1}{(1+k)^3} + \frac{D_1+d}{(1+k)^7} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^{11}} + \frac{D_1+3d}{(1+k)^{15}} + \ldots$$

$$+ \frac{D_1}{(1+k)^4} + \frac{D_1+d}{(1+k)^8} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^{12}} + \frac{D_1+3d}{(1+k)^{16}} + \ldots.$$

и введем обозначение $P_4 = \frac{D_1}{(1+k)^4} + \frac{D_1+d}{(1+k)^8} + \frac{D_1+2d}{(1+k)^{12}} + \frac{D_1+3d}{(1+k)^{16}} + \ldots.$

Тогда, $P = (1 + k)^3 P_4 + (1 + k)^2 P_4 + (1 + k) P_4 + P_4$.

Воспользовавшись формулой для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$P = P_4 \frac{(1+k)^4 - 1}{k} . \qquad (2.2.10)$$

Преобразуем P_4 :

$$P_4 = \frac{D_1}{(1+k)^4} + \frac{1}{(1+k)^4}\left(\frac{D_1}{(1+k)^4} + \frac{d}{(1+k)^4} + \frac{D_1+d}{(1+k)^8} + \frac{d}{(1+k)^8} + \ldots\right) =$$

$$=\frac{D_1}{(1+k)^4}+\frac{1}{(1+k)^4}\left(P_4+\frac{d}{(1+k)^4}+\frac{d}{(1+k)^8}+\frac{d}{(1+k)^{12}}+\dots\right)=$$

$$\frac{D_1}{(1+k)^4}+\frac{1}{(1+k)^4}\left(P_4+\frac{d}{(1+k)^4-1}\right).$$

Тогда $\qquad P_4\left[1-\frac{1}{(1+k)^4}\right]=\frac{1}{(1+k)^4}\left(D_1+\frac{d}{(1+k)^4-1}\right).$

Отсюда, $P_4=\dfrac{D_1[(1+k)^4-1]+d}{[(1+k)^4-1]^2}.$

Подставив выражение для P_4 в формулу (2.2.10), получим, что

$$P=\frac{D_1[(1+k)^4-1]+d}{k[(1+k)^4-1]}=\frac{D_1}{k}+\frac{d}{k[(1+k)^4-1]}.$$

Итак, мы получили формулу для оценки акций со «ступенчато-арифметическим» ростом дивидендов

$$P=\frac{D_1}{k}+\frac{d}{k[(1+k)^4-1]}. \qquad (2.2.11)$$

Несложно увидеть, что если вместо 4-х постоянных выплат в год, будет произведено n выплат, то формула (2.2.11) примет следующий вид:

$$P=\frac{D_1}{k}+\frac{d}{k[(1+k)^n-1]}. \qquad (2.2.12)$$

§2.3. Ипотека и линейные разностные уравнения

Для того чтобы расширить множество задач, которые можно моделировать и решать с помощью разностных уравнений, рассмотрим более широкий, чем в предыдущих параграфах класс линейных разностных уравнений. Процесс изучения этих уравнений свяжем с очень актуальной задачей – разработкой инструментария расчетов по ипотечным платежам.

В предлагаемом Вашему вниманию параграфе работе показывается, как отталкиваясь от классической задачи на определение размера выплат по ипотеке можно провести научное исследование.

Вначале мы покажем, как задача на определение размера выплат, необходимых для погашения ипотечного кредита может быть записана и решена на языке линейных разностных уравнений. Далее, мы покажем, как используя метод «решения по аналогии» и метод «чайника», можно получить решения более сложных задач, которые естественным образом получаются из исходной задачи. Полезность материала повышается тем, что его можно активно использовать для обучения студентов элементам научной работы.

В последнее время много говорится об ипотеке.

Так, на заседании правительства РФ 13 февраля 2020 Премьер-министр М. Мишустин заявил, что ипотека по ставке 9% является очень дорогой для большинства россиян. И для того, чтобы сделать ее доступной, нужно сделать ее меньше 8%. В тот момент это казалось реальным. Но последовал очередной кризис — на этот раз вызванный коронавирусам, и ставки поползли вверх. И в рамках классической ипотеки, с фиксированным размером выплат, в странах с неустойчивой экономикой, к которым относятся Россия и Кыргызстан, в ближайшее время, эта цель становится труднодостижимой. Но, о чем многие не знают, существуют и другие ипотечные схемы, которые могут позволить значительно снизить ставки по ипотеке и увеличить сроки, на которые выдаются кредиты. Об этом также говорится в данном параграфе.

Ипотека — это форма кредитования покупок недвижимости, при которой покупатель в момент покупки платит только часть денег (обычно 20% - 40%), а остальные деньги вносит банк. Затем, в течение длительного промежутка времени, делая выплаты в заранее оговоренные периоды времени, покупатель погашает задолженность банку.

В экономически развитых странах это одна из наиболее популярных форм кредитования населения, так как она весьма удобна для обеих сторон: покупатель становится собственником недвижимости, избежав многих лет ожидания, необходимых для накопления всей суммы, а банк выдает кредит, имея надежное залоговое обеспечение — недвижимость, которая куплена с помощью этого кредита. [99]

2.3.1. Ипотека с фиксированной ставкой

Задача 1

Жанат покупает дом стоимостью $60 000 на условиях ипотеки. Она отдает $20 000, а остальные деньги вносит банк. По договоренности с банком, Жанат должна расплатиться, ежеквартально выплачивая одну и ту же сумму в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 24%. Чему равна величина выплаты? [99]

Для определения искомой суммы воспользуемся линейными разностными уравнениями.

Обозначим через x_n сумму долга банку к концу квартала с номером n. Тогда, нетрудно увидеть, что *$40000*, которые нужно вернуть банку, есть величина x_0, которая должна быть амортизирована за 40 периодов, при этом каждому периоду соответствуют $24\% \cdot (1/4) = 6\%$ интереса, а $x_{40} = 0$.

Поэтому, из уравнения

$$x_n = (1 + 0{,}06)\, x_{n-1} - V, \qquad (2.3.1)$$

легко получить, что имеет место соотношение

$$x_n = (1{,}06)^n 40000 - V\frac{1 - (1{,}06)^n}{1 - 1{,}06}. \qquad (2.3.2)$$

Из (2.3.2) получаем, что в конце каждого квартала нужно выплачивать банку деньги в размере $V = 411428{,}72 / 154{,}762 = \$2658{,}46$.

Приведенный пример является примером ипотеки с фиксированной ставкой. [99]

2.3.2. Ипотека с плавающей ставкой

Несмотря на очевидные достоинства, к сожалению, в Кыргызской Республике ипотека не развита. Хотя несколько банков предлагает воспользоваться ипотечными кредитами, ставка по этим кредитам столь высока, а сроки, на которые выдаются кредиты, столь коротки, что остается завидовать даже российским потребителям, не говоря о тех, кто имеет возможность получать такие кредиты в экономически развитых странах.

В ответ на упреки в чрезмерно высоких ставках по кредитам, банки разводят руками, ссылаясь на высокие риски, связанные с неустойчивой экономической ситуацией в стране. Можно соглашаться с утверждениями о высоком риске, но дело в том, что давно придуманы способы снижения этих рисков. Так, значительная часть жилищных ипотек в США – это ипотеки с плавающей ставкой (*adjustable-rate mortgages, ARM*). Такие ипотеки позволяют кредитору изменять процентную ставку в течение срока ссуды – в заранее оговоренные моменты и при соблюдении строгих ограничений. По мнению американских экономистов, использование ипотек с плавающей ставкой привело к оживлению жилищного строительства в США в 90-х годах. [99]

Задача 2

Алмамбет покупает виллу стоимостью 100 000 евро, сделав первый взнос 30000. По договоренности с банком, он должен расплатиться в течение 10 лет, ежемесячно выплачивая одну и ту же сумму. При этом годовая ставки интереса 12%. Согласно, того же договора, если к началу шестого года годовой уровень инфляция вырастет более чем на 4%, то выплаты за последующие годы будут рассчитаны исходя из годовой ставки интереса 15%. [75, 96 с.]

Определим, величину ежемесячных выплат.

Выплаты за первые 5 лет будут вычислены, исходя из условия амортизации 70000 евро за 120 месяцев при ставке интереса 12%.

Уравнение $x_n = (1 + 0{,}01)\, x_{n-1} - V$, при условии $x_n = 70000$,

приводит к равенству $0 = (1 + 0{,}01)^{120} \cdot 70000 - V\dfrac{1 - (1 + 0{,}01)^{120}}{1 - (1 + 0{,}01)}$,

из которого легко получить, что в первые пять лет ежемесячно нужно выплачивать по $V = 231027{,}08/230{,}04 = 1004{,}3$ евро.

Эту же сумму нужно будет выплачивать в оставшееся время, если не будет значительного роста инфляции.

В противном случае, величина выплат будет пересмотрена.

Для вычисления пересмотренной суммы нужно определить величину долга на момент перерасчета. Для этого достаточно сообразить, что это решение задачи

$x_n = (1 + 0{,}01)\, x_{n-1} - 1004{,}3;$ $\quad x_0 = 70000;$ $\quad x_{60} = ?$

Она равна *45148,3* евро.

Также, величину долга на момент перерасчета можно определить, как решение задачи на нахождение сумму, которая будет амортизирована за 60 месяцев в результате выплаты *1076* евро в конце каждого месяца:

$$z_n = (1 + 0,01)\, z_{n-1} - 1004,3; \quad z_0 = ? \qquad z_{60} = 0.$$

И при этом подходе, искомая величина, конечно, равна *45148,3* евро:

$$0 = (1 + 0,01)^{60} \cdot z_0 - 1004,3\frac{1 - (1 + 0,01)^{60}}{1 - (1 + 0,01)} \Rightarrow z_0 = 1004,3 \cdot 81,67 / 1,8167 = 45148,3.$$

Далее, достаточно еще раз решить задачу об амортизации величины долга:

$$y_n = (1 + 0,0125)\, y_{n-1} - V; \qquad y_0 = 45148,3; \qquad y_{60} = 0.$$

Подставив данные в формулу для решения линейного разностного уравнения 1-го порядка, получим $0 = (1 + 0,0125)^{60} \cdot 45148,3 - V\frac{1 - (1 + 0,0125)^{60}}{1 - (1 + 0,0125)}$.

Отсюда следует, что в случае роста инфляции величина выплат вырастет до $V = 1074,1$.

Изложенная схема позволяет легко рассчитывать величины выплат и в случаях, когда договор предусматривает возможность нескольких пересмотров условий.

2.3.3. Ипотека с поправкой на уровень цен

Ипотека с фиксированной ставкой предусматривает одинаковые выплаты в течение всего времени погашения кредита. Но, так как в силу инфляции, деньги со временем дешевеют, получается, что основную нагрузку по выплате кредита потребитель несет в начальный период.

Для подтверждения, в условиях примера 1 определим, какая часть основного долга будет выплачена за 1-5 годы.

Итак, пусть u_0 это часть основного долга, которая будет погашена за 20 периодов, в результате ежеквартальных выплат величиной *$2658,46*. Тогда имеет место уравнение

$$u_n = (1 + 0,06)\, u_{n-1} - 2658,46 \text{ с условием } u_{20} = 0.$$

Отсюда получим, что $u_0 = 2658,46 \cdot 36,786/3,2071 = 30493.$

Более наглядно, будет сказать, что за 1-ю половину срока будет погашено $30493/40000 = 76,23\%$ основного долга.

Проблема, возникающая при общепринятой практике предоставления ссуды под закладную с фиксированной номинальной выплатой за период, заключается в том, что многие покупатели — обычно это молодые люди или пары, только начинающие жизнь, — как правило, не могут делать высокие реальные выплаты, которые предусматриваются в самом начале выплат. Это принуждает многих из них копить деньги для более высокой первоначальной выплаты или расстаться с мечтой о покупке собственного жилья. [99]

Для того чтобы сделать процесс погашения ипотечного кредита более приемлемым, во многих странах мира все большее распространение получает финансовый инструмент, называемый ипотекой с поправкой на уровень цен (*price-level-adjusted mortgages, PLAM*). В отличие от ипотеки с фиксированной ставкой, для которой номинальная выплата за период фиксирована, ипотека *PLAM* предусматривает рост номинальной выплаты. [99]

Причем, если темпы роста выплат будут соответствовать инфляции, то это означает постоянство реальной выплаты на протяжении всего срока ипотечного кредита. Преимущества ипотеки с поправкой на уровень цен наиболее очевидны в условиях высокого уровня инфляции. [99] Описывая ипотеку *ARM* и ипотеку *PLAM*, мы следуем книге Р.Л. Миллера и Д.Д. Ван-Хуза *Современные деньги и банковское дело* [56]. При этом техника расчета схемы погашения принадлежит нам.

Задача 3

Онола покупает квартиру стоимостью $40 000, сделав первый взнос $15000. Далее, по договоренности с банком, она должна расплатиться, делая ежемесячные выплаты в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 24%. При этом, с учетом инфляции, оцениваемой в 18% в год, величина выплат должна постоянно увеличиваться на 1,5% в месяц. [99]

Для того чтобы найти величину 1-ой выплаты, обозначим ее через b_1 и получим уравнение

$$x_n = (1 + 0,02)x_{n-1} - b_1(1 + 0,015)^{n-1}. \qquad (2.3.3)$$

Здесь $0,02 = 0,24/12$ – ставка интереса за месяц.

Итак, мы получаем, что для того чтобы провести расчеты, связанные с ипотекой *PLAM* необходимо рассмотреть более широкий, чем описываемый уравнением (1), класс линейных разностных уравнений -

- линейные разностные уравнения 1-го порядка

$$x_n = px_{n-1} + qr^{n-1}, \qquad (2.3.4)$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-тый период, коэффициенты p, q и r – постоянны.

Для того чтобы повысить интерес студентов к изучаемому материалу и привить навыки самостоятельной научной работы, можно предложить получить формулу для решения уравнения (2.3.4), используя подход, примененный к уравнению

$$x_n = ax_{n-1} + b \qquad (2.3.5)$$

– воспользоваться методом «аналогий»:

Они должны увидеть, что для того чтобы найти решение уравнения (2.3.4), полезно сделать несколько шагов:

$x_1 = px_0 + q;$

$x_2 = px_1 + qr,$ и подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получить

$x_2 = p(px_0 + q) + qr = p^2 x_0 + pq + qr;$

$x_3 = px_2 + qr^2 = p(p^2 x_0 + pq + qr) + qr^2 = p^3x_0 + p^2q + pqr + qr^2;$

$x_4 = px_3 + qr^3 = p(p^3x_0 + p^2q + pqr + qr^2) + qr^3 =$

$= p^4x_0 + p^3q + p^2qr + pqr^2 + qr^3.$

К этому времени тенденция становится понятной. Можно записать общий вид выражения:

$$x_n = p^nx_0 + p^{n-1}q + p^{n-2}qr + \ldots + pqr^{n-2} + qr^{n-1}. \qquad (2.3.6)$$

В правой части равенства (2.3.6) 1-ое слагаемое отличается от других. Поэтому, оставив его в покое, нужно преобразовать остальные:

$$x_n = p^nx_0 + p^{n-1}q\left(1 + \frac{r}{p} + \frac{r^2}{p^2} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{p^{n-1}}\right).$$

Далее, свернуть выражение в скобках и, используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получить $x_n = p^n x_0 + p^{n-1} q \frac{1 - r^n/p^n}{1 - r/p}$.

И наконец, преобразовав полученное выражение, получить искомую формулу

$$x_n = p^n x_0 + q\frac{p^n - r^n}{p - r}. \qquad (2.3.7)$$

Вернемся к задаче 3, и применим формулу (2.3.7) к расчету величин выплат.

Приняв во внимание, то, что ипотечный кредит PLAM величиной $25000 нужно погасить за 10 лет (= 120 месяцев), из формулы (2.3.7), получим

$$0 = x_{120} = 25000(1+0{,}02)^{120} - b_1\frac{(1+0{,}02)^{120} - (1+0{,}015)^{120}}{0{,}005}.$$

Отсюда, $0 = 269129{,}076 - b_1 \cdot 959{,}168$, и поэтому $b_1 = 280{,}6$.

Итак, в конце 1-го месяца Онола должна выплатить $280{,}6$, а в конце месяца с номером k величина выплаты будет равна $b_k = 280{,}6(1+0{,}015)^{k-1}$.

Лев Ландау (1908-1968) великий физик, лауреат Нобелевской премии, говорил: «Метод важнее открытия». Поэтому, не лишним будет продемонстрировать еще один способ получения формулы (2.3.7).

Для этого разделим уравнение (2.3.4) на r^n: $\frac{x_n}{r^n} = \frac{p}{r} \cdot \frac{x_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{q}{r}$,

и введя обозначения $\frac{x_k}{r^k} = y_k$; $\frac{p}{r} = a$; $\frac{q}{r} = b$, получим уравнение (2.3.5).

Теперь, воспользуемся формулой его решения, вернемся к исходным коэффициентам p, q, r и, упростив полученную формулу, получим (2.3.7).

2.3.4. Особый случай ипотеки PLAM

В данном разделе рассмотрим случай, когда рост выплат равен ставке интереса, по которой выдан ипотечный кредит.

Задача 4

Наталья покупает квартиру стоимостью $140 000, сделав первый взнос $50000. Далее, по договоренности с банком, она должна расплатиться, делая ежемесячные выплаты в течение 15 лет, исходя из годовой ставки интереса 24%. При этом, величина выплат должна постоянно увеличиваться на 2% в месяц. Требуется определить величину 1-ой выплаты. [99]

Соответствующее уравнение

$$x_n = (1 + 0{,}02)x_{n-1} - b_1(1 + 0{,}02)^{n-1}.$$

Подставив соответствующие данные в формулу (2.3.7), получим, что она не работает, так как имеет место запрещенная операция — деление на ноль:

$$0 = x_{180} = 90000(1+ 0{,}02)^{180} - b_1\frac{(1+ 0{,}02)^{180} - (1+ 0{,}015)^{180}}{0{,}02 - 0{,}02}.$$

Нетрудно увидеть, что причина в том, что рост выплат совпадает со ставкой интереса по ипотеке.

Следовательно, раз формула (2.3.7) не работает, нужно получить новую формулу, способную обслужить данную ситуацию.

Итак, требуется решить уравнение

$$x_n = px_{n-1} + qp^{n-1}. \qquad (2.3.8)$$

Несложно убедиться в том, что решение уравнения (2.3.8), можно получить аналогично тому, как получалось решение уравнения (2.3.4), и это может быть тема исследовательской мини работы.

Используя 1-й подход, они должны сделать несколько шагов:

$$x_1 = px_0 + q;$$

$x_2 = px_1 + qp$, и подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получить

$$x_2 = p(px_0 + q) + qp = p^2 x_0 + 2pq;$$

$$x_3 = px_2 + qp^2 = p(p^2 x_0 + 2pq)+ qp^2 = p^3x_0 + 3p^2q;$$

$$x_4 = px_3 + qp^3 = p(p^3x_0 + 3p^2q) + qp^3 = p^4x_0 + 4p^3q.$$

Тенденция ясна. Можно записать искомую формулу:

$$x_n = p^nx_0 + nqp^{n-1}. \qquad (2.3.9)$$

Формулу (2.3.9) также несложно получить, используя 2-й подход:

разделим уравнение (2.3.8) на p^n: $\quad \frac{x_n}{r^n} = \frac{x_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{q}{p}$,

и введя обозначения $\frac{x_k}{r^k} = y_k$; $\frac{q}{p} = s$, получим, что числа y_n являются членами арифметической прогрессии. Поэтому, $y_n = y_0 + sn$, или возвращаясь к исходным обозначениям $\frac{x_n}{r^n} = x_0 + n\frac{q}{p}$. Умножив последнее равенство на p^n, получим формулу (2.3.9).

Воспользуемся формулой (2.3.9), для того чтобы решить задачу 4:

$0 = x_{180} = 90000(1 + 0{,}02)^{180} – b_1 180(1 + 0{,}02)^{179}$.

Отсюда, $b_1 = 90000(1 + 0{,}02) / 180 = 510$.

2.3.5. Ипотека с арифметическим ростом выплат

При использовании ипотеки PLAM может иметь место парадоксальная ситуация — в какие-то моменты времени величина долга по ипотечному кредиту может превышать величину долга в начальный момент времени. [99]

Проиллюстрируем эту ситуацию, вычислив величину долга Онолы банку через 2 года после начала выплат, в условиях примера 3. [99]

$$x_{24} = 25000(1+ 0{,}02)^{24} - 280{,}6 \, \frac{(1+ 0{,}02)^{24} - (1+ 0{,}015)^{24}}{0{,}005} =$$

$$= 40210{,}93 – 10041{,}8 = 30169{,}13.$$

Один из способов, позволяющий избежать подобной ситуации – воспользоваться вариацией метода PLAM. При стандартном методе величины выплат образуют геометрическую прогрессию. Мы предлагаем вариант, при котором величины выплат будут образовывать арифметическую прогрессию, первый член которой будет равен величине интереса за 1-й период. [99]

<u>Задача 5</u>

Арстан покупает квартиру стоимостью $40 000, сделав первый взнос $15000. Далее, по договоренности с банком, он должен расплатиться, делая ежемесячные выплаты в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 24%. При этом, 1-я выплата равна величине интереса за 1-й месяц, далее выплаты будут возрастать на одно и то же число d *каждый месяц. Требуется рассчитать величины ежемесячных платежей*. [99]

Величина 1-ой выплаты равна $25000 \cdot 0{,}02 = \$500$.

Для того чтобы найти величину d, нужно решить уравнение

$$x_n = (1 + 0{,}02)x_{n-1} - (500 + d(n-1)).$$

Итак, нам необходимо рассмотреть еще один класс линейных разностных уравнений [99] — уравнения вида

$$x_n = cx_{n-1} + (f + d(n-1)). \qquad (2.3.10)$$

Уравнение (2.3.10) можно переписать в виде уравнения (2.3.5):

$$\left(x_n + \frac{dn}{c-1}\right) = c\left(x_{n-1} + \frac{d(n-1)}{c-1}\right) + f + \frac{d}{c-1}. \qquad (2.3.11)$$

Тогда,

$$\left(x_n + \frac{dn}{c-1}\right) = c^n\left(x_0 + \frac{d\cdot 0}{c-1}\right) + (f + \frac{d}{c-1})\frac{c^n-1}{c-1}.$$

Следовательно,

$$x_n = c^n \cdot x_0 + f\cdot\frac{c^n-1}{c-1} + d\cdot\frac{c^n - nc + n - 1}{(c-1)^2}. \qquad (2.3.12)$$

Приведем умозаключение, которое приводит к уравнению (2.3.11).

Для того чтобы получить уравнение вида (2.3.5) необходимо избавиться от переменной n в свободном члене уравнения (2.3.10). Для этого, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, перепишем уравнение (2.3.10) - «перераспределим» выражение $(f + d(n-1))$: $(x_n + kn) = c(x_{n-1} + k(n-1)) + m$.

Осталось привести подобные члены и определить значения неопределенных коэффициентов k и m:

$$\begin{cases} ck - k = d, \\ m - ck = f - d, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - k = f, \\ k - ck = -d, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = f + d/(c-1), \\ k = d/(c-1). \end{cases}$$

Осталось получить решение задачи 5.

Для этого нужно решить уравнение

$x_n = (1 + 0{,}02)x_{n-1} - (500 + d(n-1))$

при начальных условиях $x_0 = 25000;$ $x_{120} = 0.$

Формула (2.3.12) позволяет получить равенство

$$0 = x_{120} = 25000(1+0{,}02)^{120} - 500\frac{(1+0{,}02)^{180}-1}{0{,}02} - d\,\frac{(1+0{,}02)^{120} - 120\cdot 1{,}02 + 120 - 1}{(0{,}02)^2}.$$

Отсюда, $d = 1{,}36$.

2.3.6. Ипотека с депозитом

Проанализируем ипотечный кредит, который выдается на 7 лет, предполагает ставку дисконта 16%, дополнительным условием является депозит в банке в размере 30% от стоимости приобретаемой недвижимости в качестве обеспечения. При этом, когда сумма долга сравняется с величиной денег на депозите, депозит закрывается и кредит считается погашенным.

На фоне многих других предложений ставка 16% выглядит весьма привлекательной, но на деле все иначе. Покажем это.

Предположим, что для покупки квартиры необходимо получить кредит в размере \$70 000. Так как по условиям 30% нужно оставить на депозите, приходится оформлять кредит в размере \$100 000.

Так как ставка по кредиту равна 16% ставки дисконта, соответствующая ставка интереса равна $r = \frac{0,16}{1 - 0,16\cdot(1/12)} = \frac{0,16}{0,986672} = 0,16216 = 16,216\%.$

Для определения размера ежемесячного платежа необходимого для погашения кредита выпишем разностное уравнение и условия:

$x_n = (1+ 0,16216/12)\, x_{n-1} - b, \quad x_0 = 100000; \quad x_{84} = 0.$

Тогда, по формуле (2.1.3)

$$0 = x_{84} = 100000(1+ 0,16216\cdot\frac{1}{12})^{84} - b\frac{1-(1+0,16216\cdot\frac{1}{12})^{84}}{1-(1+0,16216\cdot\frac{1}{12})}.$$

Отсюда, $b = 1\,997,6.$

Но согласно «хитрому» условию о депозите, согласно которому выплаты по кредиту заканчиваются не через 7 лет, а когда долг сравняется с величиной депозита, выплаты заканчиваются раньше.

Имеет место следующая ситуация:

$y_n = (1+ 0,16/12)\, y_{n-1} - b, \quad y_0 = 100\,000, \quad y_n = 30\,000$ (т.к. процесс погашения долга заканчивается, когда сумма долга составит 30 000).

Определим количество периодов, за которое будет завершен процесс, то есть время, на которое реально выдается кредит:

$$30000 = y_n = 100000(1+ 0,16216\cdot\frac{1}{12})^{n} - 1997,6\,\frac{1-(1+0,16216\cdot\frac{1}{12})^{n}}{1-(1+0,16216\cdot\frac{1}{12})}.$$

Из этого уравнения, можно получить, что n приблизительно 67 периодов (месяцев) или 5,5 лет. Это означает, что в реальности, кредит величиной \$70000 будет погашен за 67 периодов в результате ежемесячных выплат в размере \$1997,6.

Чтобы подсчитать ставку интереса, которая имеет место в действительности, решим задачу:

$z_n = (1+k)z_{n-1} - 1997{,}6, \quad z_0 = 70000; \quad z_{67} = 0.$

Ее решение получается из уравнения

$$0 = z_{67} = 70000(1+k)^{67} - 1997{,}6\,\frac{1-(1+k)^{67}}{1-(1+k)}.$$

Отсюда, $k = 2{,}182\%$.

Тогда эффективная ставка интереса по этой кредитной операции

$r_e = (1 + 0{,}02182)^{12} - 1 = 0{,}2956652$, почти 30%.

Можно говорить, что здесь не учтено то, что на деньги на депозите тоже накручивается интерес. Но, к сожалению, ставки по депозитам довольно малы, а получение кредита предполагает еще ряд дополнительных расходов: на страховку, на обслуживание кредита и т.п.. Поэтому, если ставка интереса и будет меньше 30%, то весьма незначительно.

Для сравнения, средний уровень ставки ипотечного кредита в США и Китае 5%. В Европе он составляет 4%, где самый высокий уровень в Польше, там ставка равна 6%. И самая низкая ставка в Японии: 1%-2%. Причем, ипотечный кредит в Японии можно взять на любой срок, хоть на 100 лет. Предполагается, что в этом случае, выплаты завершат наследники. [99]

(Информация российского телеканала *Вести 24* от 3.02.2010).

§2.4. Новый подход к вычислению инвестиционных коэффициентов

Всем фирмам приходится решать основную экономическую проблему: как распределить имеющиеся в распоряжении ограниченные ресурсы между возможными вариантами использования. При этом они непрерывно сталкиваются с проблемой принятия решения об инвестировании — решать принесет ли расходование ресурсов ожидаемые доходы. Инвестиционные решения бывают тактическими и стратегическими.

Стратегические инвестиционные решения оперируют крупными суммами и могут привести к решительному изменению характера деятельности фирмы и от успеха или неудачи этих решений может зависеть существование фирмы.

Тактические инвестиционные решения обычно оперируют относительно небольшими суммами средств и находятся в русле обычной деятельности компании. Когда фирма рассматривает возможность покупки нового станка – это тактическое решение, также как и решение о том, арендовать или приобретать основной капитал. [70, 68 с.]

Успех бизнеса в будущем зависит от тех инвестиционных решений, которые принимаются сегодня. Тем не менее, иногда инвестиционные проекты одобряются без тщательного анализа имеющихся альтернатив. Даже в тех случаях, когда анализ проводится, полученная информация не всегда способствует принятию правильных решений, потому что информация не была обработана нужным образом.

Фирма может купить угольную шахту за 70 миллионов долларов. При этом по предварительным расчетам, она может ежегодно зарабатывать по 20 миллионов при расходах равных 8 миллионам в течение 15 лет. После этого предстоит израсходовать 5 миллионов долларов на рекультивацию территории.

Прежде чем принять решение о покупке, руководители фирмы желают знать ответы на вопросы: когда вернутся деньги, истраченные на покупку, на каких условиях можно занять деньги на покупку, чему будет равна прибыль фирмы к концу срока разработки шахты и другие подобные вопросы.

Для того чтобы ответить на такие вопросы, то есть для принятия тактических инвестиционных решений, используются инвестиционные коэффициенты, о которых будет говориться в данной главе.

Эффективное использование факторов производства определяется как отношение результата к затратам. Существует множество методов измерения результата и затрат, но какую бы разумно обоснованную единицу измерения не использовать, увеличение эффективности является важнейшим фактором. Однако в последнее время отмечается снижение темпов роста экономики. Было *сделано множество попыток объяснить это снижение. Хотя теоретики не могут дать исчерпывающих объяснений падению темпов роста, предложены разные объяснения этому. Среди них — идея о том, что широкое применение метода чистой дисконтированной стоимости — NPV — должно нести ответственность за снижение капиталовложений, которое в свою очередь вызвало падение темпов роста. Эта точка зрения изложена в приведенной цитате: «Так как эти методы находят все более широкое применение в принятии инвестиционных решений, рост капитальных вложений и расходов на НИОКР в США замедлился. Мы считаем, что это нечто большее, чем простое совпадение. Мы полагаем, что метод дисконтирования внес свою лепту в уменьшение желания инвестировать по двум причинам: 1) часто применение его основано на неправильном восприятии экономического окружения в прошлом и будущем; 2) ему присуща предрасположенность против инвестиций, так как в применении теоретических разработок на практике часто допускают серьезные ошибки. Грубо говоря, желание менеджеров смотреть в будущее в перевернутый телескоп дисконтированных денежных потоков значительно сокращает это будущее.» В оправдание только что процитированных авторов необходимо отметить, что внимательное прочтение цитаты и статьи, из которой она взята, указывает на то, что именно «неправильное использование», а не само по себе использование дисконтирования приводит к нежелательным последствиям. Нашу позицию можно изложить следующими словами: метод чистой дисконтированной стоимости — NPV — наилучшая существующая основа для анализа денежных потоков от инвестиций.* [70, 69 с.]

Весь предыдущий абзац взят из 1-ой части очень хорошей книги Г. Бирмана и С. Шмидта «Экономический анализ инвестиционных проектов» [57]. Мы не собираемся оспаривать утверждения о том, что NPV — наилучший из традиционных инвестиционных коэффициентов. Но, мы намерены показать, что в отдельных случаях, использование NPV для принятия решения действительно может способствовать снижению капиталовложений. [70, 69 с.] Для того чтобы избавиться от этого недостатка, предлагается новый инвестиционный коэффициент. Кроме того, предлагаем отказаться от использования коэффициента Индекс рентабельности. Также, важной особенностью этой главы является новый алгоритм вычисления традиционных инвестиционных коэффициентов, основанный на рекуррентных соотношениях.

2.4.1. Говоря об анализе инвестиционных проектов, имеют в виду следующую ситуацию: необходимо решить, стоит ли вкладывать деньги в размере CF_0 в начальный момент времени, если это вложение должно вызвать денежные потоки (**cash flows**) CF_1, CF_2, …, CF_N , которые возникают в конце каждого последующего периода времени [101]:

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	...	*N*
Денежные потоки	$- CF_0$	CF_1	CF_2	...	CF_N

(Обычно, денежный поток определяется как сумма чистого дохода (прибыли) и амортизации за соответствующий период).

Для того чтобы иметь основу для анализа инвестиционных коэффициентов напомним и по-новому взглянем на основные определения.

Индекс рентабельности (profitability index - ***PI***) показывает, сколько денег принесла каждая денежная единица, затраченная на проект.

Для того чтобы вычислить индекс рентабельности нужно разделить сумму всех будущих денежных потоков CF_1, CF_2, …, CF_N на начальную инвестицию CF_0 . Чем больше это отношение — тем лучше проект. Если индекс меньше 1, то проект неприемлем.

Для проекта с нижеприведенными денежными потоками

Периоды времени	0	1	2	3	4
Денежные потоки	-80	60	50	40	-20

индекс рентабельности равен $(60 + 50 + 40 - 20)/(80) = 1{,}625$.

Период возврата (payback period - ***PP***) показывает, сколько времени понадобится, для того чтобы к инвестору вернулись деньги, вложенные в проект.

Для того чтобы вычислить коэффициент «период возврата» будем последовательно вычислять значения кумулятивных денежных потоков (**cumulative cash flow** - $\boldsymbol{CCF_m}$) по формуле

$$CCF_m = CCF_{m-1} + CF_m \,, \qquad (2.4.1)$$

при $CCF_0 = -CF_0$, до тех пор пока CCF_m не станет неотрицательным. [101]

Если это произошло при $\boldsymbol{m = i}$, период возврата

$$PP = i - \frac{CCF_i}{CF_i} \,, \qquad (2.4.2)$$

если же CCF_m отрицателен при всех значениях $m = 1, 2, \ldots, N$, то считается, что проект плохой – не окупаемый. (Номер i в формуле (2.4.2) есть номер периода, в котором инвестор возвращает все деньги взятые на проект, отношение CCF_i / CF_i указывает на часть периода с номером i, в которой проект начинает приносить прибыль. При этом предполагается, что денежный поток CF_i равномерно распределен внутри периода с номером i .) [101]

Например, для проекта приведенного далее, кумулятивные денежные потоки становятся неотрицательными, начиная с 3-го периода: [101]

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Денежные потоки $\boldsymbol{CF_m}$	*-100*	*40*	*50*	*40*	*20*

$CCF_1 = -100 + 40 = -60$, $CCF_2 = -60 + 50 = -10$, $CCF_3 = -10 + 40 = 30$.

Поэтому, период возврата равен $3 - (30/40) = 2{,}25$ года.

Главное преимущество, которым обладают индекс рентабельности и период возврата — их простота.

К сожалению, они имеют существенный недостаток. Для того чтобы продемонстрировать это, приведем соответствующий пример.

Пример 1

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Денежные потоки А1	*-100*	*10*	*20*	*70*	*40*
Денежные потоки А2	*-100*	*80*	*10*	*10*	*40*

Вычислим индекс рентабельности:

$$PI(A1) = \frac{10+20+70+40}{100} = 1{,}4; \qquad PI(A2) = \frac{80+10+10+40}{100} = 1{,}4;$$

и накопленные денежные потоки:

$CCF_1(A1) = -100 + 10 = -90$, $\qquad CCF_1\,(A2) = -100 + 80 = -20$,

$CCF_2(A1) = -90 + 20 = -70,$ $CCF_2(A2) = -20 + 10 = -10,$

$CCF_3(A1) = -70 + 70 = 0.$ $CCF_3(A2) = -10 + 10 = 0.$

Итак, индекс рентабельности (*1,4*) и период возврата (3 периода) для проектов А1 и А2 один и тот же. Но вряд ли стоит говорить, что эти проекты эквивалентны. Каждый, кто имеет понятие о стоимости денег во времени выберет проект А2.

2.4.2. Обычное предположение заключается в том, что деньги на проект берутся взаймы. Если даже используются свои деньги, все равно утверждение корректно, так как существуют альтернативные варианты использования этих денег. Раз деньги взяты взаймы, то за их использование нужно платить. Обычно, эта плата указывается в виде ставки интереса, по которой нужно платить за деньги занятые на осуществление проекта. Эта ставка интереса называется стоимостью капитала и обозначается ***k.*** [101]

Очень часто, бывает сложно определить из каких источников фирма берет деньги на проект. В этой ситуации, стоимость капитала определяется как средневзвешенная величина интереса по всем долгосрочным пассивам фирмы.

Например, если долгосрочные обязательства фирмы РОЙ имеют форму облигаций с доходностью 12% и равны 3 миллионам долларов, кроме того, фирма выпустила привилегированные акции на 2 миллиона долларов и доходностью 14% и обычные акции на 4 миллиона долларов, по которым ожидается доход 15,5%, то стоимость капитала фирмы РОЙ равна

$$\frac{12\% \cdot 3 + 14\% \cdot 2 + 15{,}5\% \cdot 4}{3 + 2 + 4} = \frac{126\%}{9} = 14\%.$$

Примечание

В данном случае, при определении стоимости капитала, не учитывалось влияние налогов.

О том, как учесть налоги говорится в учебниках по финансовому менеджменту или теории инвестиций [57].

Например, если фирма платит налог на прибыль по ставке 10%, то стоимость капитала равна

$$\frac{(1-0{,}1)\cdot 12\%\cdot 3+14\%\cdot 2+15{,}5\%\cdot 4}{3+2+4}=\frac{122{,}4\%}{9}=13{,}6\%.$$

Далее, мы будем говорить о том, как стоимость капитала, то есть стоимости денег во времени, учитывается при оценке проектов.

Для того чтобы показать, что при учете стоимости денег во времени проект А1 лучше, чем проект А2 используем улучшенный вариант коэффициента период возврата – Капитализированный Период Возврата **(Compounded payback period with cost of capital – PP(k)),** который можно вычислить по формуле (2.4.2), определяя накопленные денежные потоки по формуле:

$$CCF_m = CCF_{m-1}(1+k)+CF_m. \qquad (2.4.3)$$

Здесь $CCF_0 = -CF_0$, k – стоимость капитала.

Примечания

Далее, если не будет специальных оговорок, будем предполагать, что периоды времени соответствуют годам, а говоря о значения кумулятивных денежных потоков, имеем в виду величины, вычисленные по формуле (2.4.3).

Коэффициент капитализированный период возврата часто называют дисконтированным периодом возврата **(Discounted payback period).** Но это название определено соответствующим способом вычисления, и на наш взгляд не передает сути коэффициента. Очень часто, говоря о периоде возврата, подразумевают капитализированный период возврата.

Предположим, что стоимость капитала равна 14% и вычислим значения кумулятивных денежных потоков для проекта А1:

$$CCF_1 = -100(1+0{,}14)+10 = -104,$$

$$CCF_2 = -104(1+0{,}14)+20 = -98{,}56,$$

$$CCF_3 = -98{,}56(1+0{,}14)+70 = -42{,}3584,$$

$$CCF_4 = -42{,}3584(1+0{,}14)+40 = -8{,}288576.$$

Вычисления показывают, что при стоимости капитала 14% проект не окупается.

Вычислим кумулятивные денежные потоки проекта А2:

$$CCF_1 = -100(1+0{,}14)+80 = -34,$$

$CCF_2 = -34(1 + 0,14) + 10 = -28,76,$

$CCF_3 = -28,76(1 + 0,14) + 10 = -22,7864,$

$CCF_4 = -22,7864(1 + 0,14) + 40 = 14,023504.$

Отсюда, по формуле (2.4.2), получаем, что период возврата при стоимости капитала 14% равен $4 - (14,023504 / 40) = 3,65$ года.

Итак, коэффициент период возврата с учетом стоимости капитала показывает, то что должно иметь место: проект А2 лучше, чем проект А1.

К сожалению, коэффициент, называемый капитализированный период возврата, так же как и простой период возврата имеет существенный недостаток: он не учитывает денежные потоки, которые имеют место после возврата затраченных денег.

Пример 2

Годы	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
CF проекта **C**	*-317*	*100*	*100*	*100*	*100*	*10000*
CF проекта **D**	*-317*	*200*	*200*	*200*	*200*	*200*

Период возврата при стоимости капитала 10% для проекта **C** – 4 года, для проекта D**,** конечно меньше, но вряд ли можно говорить о том, что проект D лучше.

2.4.3. Чистая приведенная стоимость проекта — NPV

Коэффициент период возврата с учетом стоимости капитала является удобным и широко используемым в практической деятельности. Он позволяет определить как приемлемость проекта — если период возврата меньше длительности проекта, то он приносит выгоду, так и оценить рискованность проекта — чем меньше период возврата, тем ниже риск. Но, как отмечено выше, он имеет существенный недостаток — он не учитывает денежные потоки, которые имеют место после возврата затраченных денег. Для того чтобы избавиться от этого недостатка будет логично рассматривать коэффициенты, которые учитывают все денежные потоки.

Самым лучшим, с теоретической точки зрения (об этом говорится почти во всех учебниках по финансам, инвестициям и т.п.) коэффициентом подобного рода, является коэффициент называемый **чистой приведенной стоимостью проекта – NPV (Net Present Value)**.

Пример 3

Вычислим **NPV** проекта **E:**

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*
Денежные потоки	*-100*	*60*	*40*	*20*

зная, что стоимость капитала $k = 12\% = 0{,}12$.

Для этого вычислим накопленные (кумулятивные) денежные потоки: исходя из начальных данных, стоимости капитала и данных 1-го года

$CCF_1 = -100(1 + 0{,}12) + 60 = -112 + 60 = -\$52$;

проделаем те же действия, используя полученный результат и данные

2-го года: $CCF_2 = -52(1 + 0{,}12) + 40 = -18{,}24$;

3-го года: $CCF_3 = -18{,}24(1 + 0{,}12) + 20 = -0{,}4288$.

Накопленный (кумулятивный) денежный поток последнего периода CCF_N будем называть конечным значением – **TV (terminal value)** проекта.

Итак, при $k = 12\%$ **TV** проекта равно $-0{,}4288$.

Вычислим исходное значение этого числа:

$-0{,}4288/(1 + 0{,}12)^3 = -0{,}3052$ денежных единиц.

Это число *(-0,3052)* есть чистая приведенная стоимость проекта **E** при стоимости капитала *12%* ($NPV_E(12\%)$).

Как нужно понимать этот результат? Знак минус указывает на то, что при указанных условиях проект является убыточным, и фирма должна его отвергнуть. Но, наряду с обычными коммерческими проектами, существуют проекты, которые должны быть обязательно осуществлены. Представьте себе, что проект **E** — это проект, связанный с очисткой города от мусора. В этом случае число *(-0,3052)* укажет на минимальную величину трансферта, который должен выделить город для того чтобы побудить какую-либо фирму взяться за этот проект.

Если стоимость капитала равна 10%, то соответствующие значения накопленных денежных потоков:

$-100(1 + 0{,}10) + 60 = -110 + 60 = -50$.

-50(1 + 0,10) + 40 = -15;   *-15(1 + 0,10) + 20 = 3,5*.

Следовательно, $NPV_E(10\%) = 3,5/(1 + 0,10)^3 = 2,63$.

Это число можно трактовать следующим образом: пусть на осуществление проекта **E** претендуют несколько фирм и объявлен соответствующий тендер. Тогда, *2,63* денежных единиц – это максимум, который может предложить фирма желающая получить этот проект.

Если использовать язык формул, то конечное значение **TV** запишется в виде

$$TV = (-CF_0)(1+k)^N + \sum_{m=1}^{N} CF_m(1+k)^{N-m}$$

а *NPV*, соответственно

$$NPV = \frac{TV}{(1+k)^N} \; . \qquad (2.4.4)$$

Несложно увидеть, что формулу (2.4.4) легко переписать в виде

$NPV = (-CF_0) + \sum_{m=1}^{N} CF_m(1+k)^{-m}$, обычно используемом при вычислениях NPV.

Но, по нашему мнению, вычисление NPV через последовательное вычисление кумулятивных денежных потоков более предпочтительно. При использовании этой техники вычислений можно более эффективно использовать калькулятор — на каждом шаге используется результат предыдущих вычислений, имеющийся на дисплее, а также, одновременно с вычислением конечного значения TV можно определить величину периода возврата с учетом интереса.

Кроме того, этот путь больше подходит для вычисления коэффициента, который мы введем несколько позднее.

2.4.4. Дисконтированный индекс рентабельности

Как было отмечено ранее, индекс рентабельности также как и период возврата имеет недостаток, заключающийся в том, что он не учитывает стоимость денег во времени. Можно попытаться исправить этот недостаток, и рассматривать **дисконтированный индекс рентабельности – PI(k)**.

Для того чтобы вычислить дисконтированный индекс рентабельности нужно разделить текущую стоимость будущих денежных потоков на начальную инвестицию.

Пример 4

Дисконтированный индекс рентабельности проекта

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*
Денежные потоки	*-100*	*80*	*70*	*-10*

при условии, что стоимость капитала 20%, равен

$$\left(\frac{80}{(1+0{,}20)}+\frac{70}{(1+0{,}20)^2}-\frac{10}{(1+0{,}20)^3}\right)/100=\frac{66{,}67+48{,}61-5{,}787}{100}=1{,}095.$$

По нашему мнению, этот коэффициент не нужно использовать при анализе инвестиционных проектов.

Во-первых, дисконтированный индекс рентабельности имеет существенный недостаток: он не реагирует на размер проекта. Представьте себе, что фирма имеет два взаимоисключающих проекта освоения земельного участка:

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*
Денежные потоки проекта R	*-10*	*6*	*6*	*6*
Денежные потоки проекта Q	*-100*	*60*	*60*	*59*

Очевидно, что если фирма ориентируется на дисконтированный индекс рентабельности, то при любой стоимости капитала она должна выбрать проект **R**, и отказаться от проекта **Q**. Вряд ли такой выбор можно считать удачным. Более того, не сложно убедиться в том, что если стоимость капитала для проекта **Q** будет в пределах 33%, то при любой стоимости капитала для проекта **R**, NPV проекта **Q** будет больше, чем NPV проекта **R**.

Во-вторых, если рассматривать проекты, требующие равных инвестиций, то во всех случаях дисконтированный индекс рентабельности дает тот же ответ, что и NPV.

Для того чтобы доказать это утверждение, преобразуем выражение для дисконтированного индекса рентабельности $PI\,(k) = \left(\sum_{m=1}^{N} CF_m(1+k)^{-m}\right)/CF_0$, путем вычитания и обратного добавления одного и того же выражения к числителю $PI(k) = \left[\left(\sum_{m=1}^{N} CF_m(1+k)^{-m}\right) - CF_0 + CF_0\right] / (CF_0) =$

$= (и\ разбив\ дробь\ на\ две,\ получим\ требуемое) =$

$$= \left[\left(\sum_{m=1}^{N} CF_m(1+k)^{-m}\right) - CF_0\right] / (CF_0) + 1 = \frac{NPV(k)}{CF_0} + 1 \ .$$

Итак, мы получили формулу, связывающую дисконтированный индекс рентабельности и коэффициент *NPV*

$$PI(k) = \frac{NPV(k)}{CF_0} + 1 \ . \qquad (2.4.5)$$

Из формулы (2.4.5) следует, что если инвестиционные проекты имеют одинаковую величину начальной инвестиции CF_0, то большему значению *NPV* всегда будет соответствовать большее значение *PI*. Причем, если *NPV* отрицательна – проект убыточен, то и *PI* меньше единицы, что говорит о том же.

2.4.5. Внутренняя норма доходности проекта – IRR.

Далее, имеет смысл постараться найти ответ на вопрос: Чему равен максимум значений стоимости капитала, при которых можно будет вернуть без ущерба для себя деньги, взятые на проект?

Для удобства переформулируем вопрос: При каком значении стоимости капитала ***k*** конечное значение проекта **TV** равно *0*?

Это число называется внутренней нормой доходности проекта –

- IRR (Internal Rate of Return). [101]

Вспомнив связь между **TV** и **NPV** ($NPV = TV/(1+k)^N$), нетрудно увидеть, что это определение согласуется с традиционным определением: внутренней нормой доходности проекта называется величина стоимости капитала, при которой NPV проекта равно *0*.

Пример 5 Вычислим IRR проекта **G**

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Денежные потоки	*-10*	*2*	*3*	*6*	*5*

считая, что периоды времени соответствуют годам.

Пусть ставка интереса $k = 20\% = 0,2$.

Тогда, CCF_1 составит: $-10(1 + 0,2) + 2 = -12 + 2 = -\$10$.

Проделаем те же действия, используя данные

2-го года: $CCF_2 = -10(1 + 0,2) + 3 = -9$;

3-го года: $CCF_3 = -9(1 + 0,2) + 6 = -4,8$;

4-го года: $CCF_4 = -4,8(1 + 0,2) + 5 = -0,76$.

Итак, при $k = 20\%$ **TV** проекта не намного меньше нуля. Следовательно, IRR должно быть несколько меньше этого значения ***k***. [101]

Поэтому, повторим вычисления, взяв $k = 18\%$.:

$-10(1 + 0,18) + 2 = -11,8 + 2 = -9,8$; $-9,8(1 + 0,18) + 3 = -8,564$;

$-8,564(1 + 0,18) + 6 = -4,11$; $-4,11(1 + 0,18) + 5 = 0,15$.

Теперь мы получили положительное число. Следовательно, значение IRR находится между *18%* и *20%* (рисунок 2.4.1.) [101]

Применим линейную интерполяцию, для того чтобы найти это значение: так как изменение в $20 - 18 = 2\%$ приводит к изменению в $0,15 - (-0,76) = 0,91$ единиц, IRR проекта **G**, приблизительно, равна $18\% + (2\% / 0,91)0,15 = 18,33\%$.

Использовав полученное значение и повторив вычисления, можно получить и более точное значение IRR, но этого делать не стоит, так как сами исходные данные — значения денежных потоков — являются предположительными. [101]

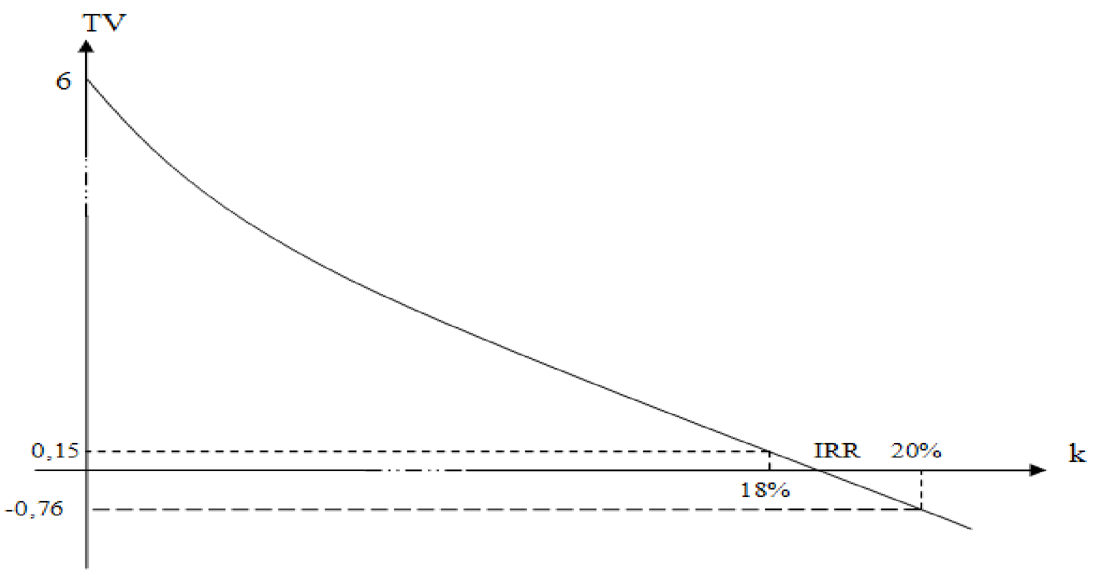


Рисунок 2.4.1. Связь стоимости капитала и TV для регулярных проектов.

IRR удобен для использования тем, что, сравнив его значение со значением стоимости капитала для фирмы, можно сразу увидеть, является ли проект окупаемым. [101]

Например, если имеются 2 фирмы, фирма Альфа, со стоимостью капитала 20%, и фирма Бетта, со стоимостью капитала 18%, то проект **G** является убыточным для фирмы Альфа и прибыльным для фирмы Бетта. [101]

Если проект длится три периода времени (нулевой, 1-ый и 2-ой), то значение IRR не сложно найти, решив квадратное уравнение.

Пример 6

Вычислим IRR проекта **H**:

Периоды времени	*0*	*1*	*2*
Денежные потоки	*-1000*	*870*	*427*

Из формулы (2.4.3)

$CCF_1 = -1000(1 + k) + 870 = -130 - 1000k,$

$CCF_2 = (-130 - 1000k)(1 + k) + 427 = 297 - 1130k - 1000k^2 = TV.$

Так как по определению, *IRR* есть решение уравнения $TV = 0$, решаем квадратное уравнение $297 - 1130k - 1000k^2 = 0$, и получаем корни *0,22* и *(-1,35)*. По смыслу стоимость капитала не может быть отрицательной, поэтому корень *(-1,35)* является посторонним. Следовательно, IRR проекта **H** равна *22%.*

Для нахождения IRR более длительных проектов необходимо использовать приближенные методы (см. пример 5). Также следует отметить, что современные финансовые калькуляторы умеют находить значение IRR.

2.4.6. Чистая будущая стоимость проекта

Предположим, что фирма рассматривает инвестиционный проект **F**, считая что стоимость капитала равна 20%. [101]

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Денежные потоки	*-10*	*7*	*6*	*2*	*1*

Вычислим накопленные денежные потоки:

$CCF_0 = -10;\ CCF_1 = (1+0,2)(-10) + 7 = -5;\ CCF_2 = (1+0,2)(-5) + 6 = 0.$

Обратите внимание, в конце 2-го периода произошло знаменательное событие — деньги, взятые на осуществление проекта, возвращены в полном объеме. Следовательно, деньги, которые фирма получит в следующем периоде $CCF_3 = (1 + 0{,}2)(0) + 2 = 2$, можно реинвестировать – вложить в другие проекты.

С этого момента**, вместо стоимости капитала** (*k*), следует рассматривать **ставку реинвестирования!** Она, конечно, может равняться стоимости капитала, но это совсем не обязательно. Обычно, ставка реинвестирования больше чем стоимость капитала – фирма занимает деньги на проект при ставке интереса *k*, рассчитывая получить доход описываемый более высокой ставкой. [101]

Закончим пример, предполагая, что ставка реинвестирования равна стоимости капитала: $CCF_4 = (1 + 0{,}2)(2) + 1 = 3{,}4$.

Итак, к моменту окончания проекта, если все предположения окажутся верными, фирма, осуществившая проект **F**, станет богаче на 3,4 единиц. Дисконтировав: $3{,}4/(1 + 0{,}2)^4 = 1{,}63996$ найдем чистую приведенную стоимость проекта — NPV.

Отметим, что при вычислении NPV стоимость капитала и ставка реинвестирования считаются одинаковыми.

По аналогии с NPV, предлагаем назвать число *3,4* <u>чистой будущей стоимостью проекта</u> **- NFV(Net Future Value).**

Если стоимость капитала и ставка рефинансирования совпадают, то NFV равно TV. [101]

При вычислении NFV стоимость капитала и ставка рефинансирования не обязаны совпадать!

Поэтому, если доходность инвестиций фирмы равна 25%, то NFV составит $(1 + 0{,}25)(2) + 1 = 3{,}5$.

Настало время обосновать очень серьезное утверждение, которое было сформулировано в водной части: *в отдельных случаях, использование NPV для принятия решения может способствовать снижению капиталовложений.* [101]

Пример 7

Рассмотрим проект **S**, считая, что стоимость капитала равна 20%:

Периоды времени	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Денежные потоки	*-100*	*70*	*60*	*50*	*40*	*-123*

Вычислим накопленные денежные потоки: $CCF_0 = -100;$

$CCF_1 = (1 + 0,2)(-100) + 70 = -50;$ $CCF_2 = (1 + 0,2)(-50) + 60 = 0.$

Деньги, взятые на осуществление проекта **S**, в конце 2-го периода возвращены в полном объеме. Следовательно, далее, вместо стоимости капитала нужно рассматривать ставку реинвестирования.

Для того чтобы закончить вычисление NPV проекта нужно положить, что ставка реинвестирования равна стоимости капитала.

$CCF_3 = (1 + 0,2)(0) + 50 = 50;$ $CCF_4 = (1 + 0,2)(50) + 40 = 100;$

$CCF_5 = (1 + 0,2)(100) - 123 = -3.$

Получили, что NPV проекта **S:** $-3/(1 + 0,2)^5 = -1,2$, отрицательна.

Поэтому, согласно правилам использования чистой приведенной стоимости – NPV – проект **S** нужно отвергнуть.

Но, если учесть то, что деньги, полученные по итогам 3-го и далее периодов, принадлежат фирме, то к накопленным денежным потокам в 4-м и далее периодах следует применять ставку реинвестирования. [101]

Если ставка реинвестирования равна 22%, то исправленные накопленные денежные потоки (**Adjustable Cumulative Cash Flows - ACCF**) будут равны

$ACCF_4 = (1 + 0,22)(50) + 40 = 101;$ $ACCF_5 = (1 + 0,22)(101) - 123 = 0,22.$ [101]

Итак, мы получили, что если ставка реинвестирования 22%, а стоимость капитала 20%, то NFV проекта **S** равна 0,22 денежные единицы. Другими словами, если ставка реинвестирования больше или равна 22%, то проект, который согласно правилу NPV должен быть отвернут, оказывается прибыльным. Можно говорить о том, что все дело в отрицательном денежном потоке последнего периода. Да, это так. Но в последнее время, в связи с все возрастающими требованиями к экологическим и социальным составляющим проектов, таких проектов становится все больше и больше. *(Предполагается, что после окончания проекта должна* *быть проведена рекультивация территории, часть работников должна получить выходное пособие и т.п.)* [101]

Использование коэффициента NFV особенно актуально для развивающихся стран, где разница между стоимостью капитала и ставкой реинвестирования может быть очень значительной. [101]

К примеру, в Кыргызстане существует большая разница между депозитными ставками и ставками, под которые банки выдают кредиты.

Для подтверждения, приведем выписку из таблицы основных макроэкономических показателей Кыргызской Республики (таблица 2.4.1):

Таблица 2.4.1 – Средневзвешенные ставки % по депозитам и кредитам в Кыргызской Республике (на конец периода) [58].

	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Ставка % по депозитам	*4,26*	*2,84*	*4,78*	*4,53*	*4,25*	*4,13*	*4,2*
Ставка % по кредитам	*18,40*	*17,58*	*18,89*	*18,32*	*15,95*	*14,99*	*14,77*

Поэтому, если при анализе проекта используется только стоимость капитала, то есть коэффициент NPV, то, теоретически, многие весьма выгодные инвестиционные проекты могут быть отвергнуты. [101] Мы не думаем, что анализ проектов в банках Кыргызстана стоит на столь высоком уровне, что это в действительности имеет место. Но при этом имеет место любопытный факт: даже в условиях глобального экономического кризиса, когда финансовая сфера страдает от нехватки ликвидности, в банковской сфере Кыргызстана по утверждению бывшего тогда председателем Национального Банка Кыргызской Республики М. Алапаева (январь 2009 года) отмечалась излишняя ликвидность. Следует отметить, что и в 2020 году банковский сектор Кыргызстана имеет излишнюю ликвидность.

2.4.7. Сравнение взаимоисключающих проектов

Часто возникает вопрос – какой коэффициент при оценке проектов лучше? В некоторых современных учебниках утверждается, что достаточно использовать инвестиционный коэффициент NPV.

В частности, в книге известного немецкого экономиста Лутца Крушвица Инвестиционные расчеты сказано: *Внутренняя ставка процента является* *критерием, который, по нашему убеждению, как правило, не годится для оценки инвестиционных проектов. Уже в начале 1970-х гг было предложено выбросить IRR из учебников по инвестиционным расчетам* [59].

Сложно согласиться со столь экстремистскими высказываниями, так как, сравнивая IRR и стоимость капитала можно сразу сказать, окупится проект или нет. Другими словами IRR можно рассматривать как точку перелома (break-even point).

В пользу коэффициентов IRR и период возврата с учетом интереса свидетельствует таблица из популярного американского учебника (таблица 2.4.2) [60]:

Таблица 2.4.2. Таблица популярности инвестиционных коэффициентов.

Методы планирования капиталовложений применяемые на практике			
Крупные фирмы США			
	Период возврата с учетом интереса	IRR	NPV
	80,3%	65,5%	67,6%
Межнациональные фирмы			
Основной метод	5%	65,3%	16,5%
Вспомогательный метод	37,6%	14,6%	30%

По нашему мнению, при сравнении и оценке инвестиционных проектов лучшим, чем NPV коэффициентом, является коэффициент NFV. Для того чтобы подтвердить это утверждение, рассмотрим проекты ***K*** и ***L*** [101]:

Денежные потоки \ Год	*0*	*1*	*2*	*3*
K	*-100*	*120*	*10*	*10*
L	*-100*	*10*	*10*	*143,5*

Пусть стоимость капитала фирмы 10%.

Тогда NPV проекта ***K*** равен 33,1/1,331 = 24,8685, а NPV проекта ***L*** равен 34,5/1,331 = 25,92. Итак, следуя рекомендациям классических учебников финансового менеджмента и теории инвестиций, следует выбрать проект ***L*** . [101]

Однако, как это нетрудно увидеть, дисконтированный период возврата и IRR проекта ***K*** меньше, чем у проекта ***L*** *($PP_K(10\%) < 1$; $PP_L(10\%) > 2$; $IRR(K)>20\%$;*

IRR(L)<20%). Соответственно, риск проекта ***K*** меньше, чем у проекта ***L***, а один из основополагающих принципов финансового анализа утверждает, что необходимо принимать во внимание не только доход, но и риск. [101]

Для того чтобы устранить возникающее противоречие прибегнем к помощи коэффициента NFV. Так как фирмы стараются осуществлять только проекты, приносящие прибыль, ставка реинвестирования, как правило, больше стоимости капитала. Пусть ставка реинвестирования равна 12%. Тогда, NFV проекта ***K*** равен 33,744, а NFV проекта ***L*** равен 33,5, и соответственно, получаем, что проект ***K*** лучше. Отметим, что так как деньги вложенные в проект ***L*** возвращаются только в последний период, на оценку проекта ***L*** ставка реинвестирования не влияет. [101]

При анализе взаимоисключающих проектов часто применяется **норма равноправности** – это величина стоимости капитала, при которой NPV анализируемых проектов будут равны друг другу. Но использование коэффициента NFV говорит нам, о том, что и при использовании этого критерия можно получить неправильные выводы.

Пример 8

Рассмотрим проекты ***M*** и ***N***:

Денежные потоки \ Год	*0*	*1*	*2*	*3*
M	*-100*	*80*	*70*	*19,6*
N	*-100*	*10*	*20*	*190*

Нетрудно видеть, что при малых значениях стоимости капитала проект N выгоднее: $TV_N(0\%) = NPV_N(0\%) = 120;$ $TV_M(0\%) = NPV_M(0\%) = 69{,}6$.

В то же время, при относительно больших значениях стоимости капитала проект N хуже: IRR проекта N равен 40%, IRR проекта M 32,8%.

Норма равноправности проектов равна IRR искусственного проекта ***M – N*** денежные потоки которого есть разность соответствующих денежных потоков:

Денежные потоки \ Год	*0*	*1*	*2*	*3*
M - N	*0*	*70*	*50*	*-170,4*

Решив квадратное уравнение $70x^2 + 50x - 170{,}4 = 0$, определим, что IRR проекта ***M – N,*** или что, то же самое норма равноправности проектов ***M*** и ***N*** равна

24,3431%. Это означает, что при стоимости капитала от *0%* до *24,3431%* NPV проекта N больше, и соответственно проект ***N*** лучше, чем проект ***M.*** А если стоимость капитала больше *24,3431%,* то больше NPV проекта M. Так, при стоимости капитала *24%* NPV проекта N равен *20,7244*, а NPV проекта M равен *20,3216*.

Период возврата при этой величине стоимости капитала для проекта N больше 2-х лет, для проекта M меньше 2-х лет. Поэтому, при вычислении NFV в 3-м периоде для проекта ***N*** будет использована стоимость капитала**,** а для проекта M должна быть использована ставка реинвестирования. В результате, при стоимости капитала 24% и ставке реинвестирования 30% чистая будущая стоимость NFV проекта N равная *39,5136* меньше, чем NFV проекта M равная *39,672.* Полученный результат вступает в противоречие с результатом, полученным при использовании нормы равноправности.

2.4.8. Множественное IRR

В теоретических исследованиях большое внимание уделяется проектам, имеющим несколько значений IRR. В этих ситуациях даже самые ярые сторонники NPV попадают в щекотливую ситуацию: на некоторых интервалах изменения стоимости капитала ***k***, с ростом ***k*** растет значение NPV проекта, то есть имеет место абсурд — получается, что выгоднее занимать деньги под больший процент. Также не понятно, как использовать критерий для шаблонных проектов, гласящий, что чем больше IRR, тем лучше.

В этих случаях использование коэффициента NFV позволяет получить достаточно простую и логичную картину.

Пусть проект ***J*** имеет следующие денежные потоки

Периоды времени	*0*	*1*	*2*
Денежные потоки	*-100*	*230*	*-132*

Отрицательный денежный поток 2-го периода может объясняться необходимостью крупных затрат при закрытии проекта — например, необходимо истратить деньги на рекультивацию территории. [101]

Для того чтобы найти IRR, приведем все денежные потоки к концу второго периода, сложим и приравняем к *0*: $-100(1 + r)^2 + 230(1 + r) – 132 = 0$.
Его корни $r = 10\%$ и $r = 20\%$. Не трудно убедиться в том, что TV, и соответственно, NPV проекта положителен, если стоимость капитала лежит между найденными значениями: *10%* и *20%* (рисунок 2.4.2).

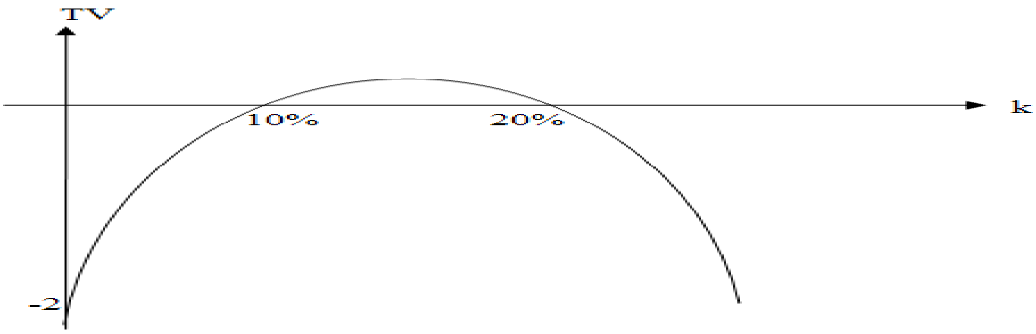


Рисунок 2.4.2. Случай множественного IRR.

Но было бы очень странно, если бы мы отказались рассматривать ситуации, в которых стоимость капитала меньше 10%, в результате того, что фирме удалось занять деньги на проект по очень низкой ставке интереса. [101]

Представьте себе лицо делового партнера, который демонстрируя свое хорошее отношение, предлагает нам деньги под 5% ставки интереса, а мы ему говорим: «Нет, это нам не выгодно. Нам будет лучше, если Вы займете нам деньги под 15% ставки интереса». Будет не удивительно, если после этого он предпочтет не иметь деловые отношения с нами.

В то же время не стоит отбрасывать все ситуации, когда стоимость капитала больше 20%. Например, проект ***J*** приемлем при стоимости капитала 28%, если ставка реинвестирования больше 29,42%. [101]

Для того чтобы провести более точный анализ проекта ***J***, обозначим стоимость капитала через k_1, ставку реинвестирования через k_2 . Тогда, чистая будущая стоимость проекта будет равна: $NFV = (-100(1 + k_1) + 230)(1 + k_2) – 132$.

Подставляя значения стоимости капитала в полученное выражение легко определить значения ставки реинвестирования, при которых будет найдено необходимое значение чистой будущей стоимости проекта.

Например, при $k_1 = 15$ (то есть если на проект удастся занять деньги под *15%*) проект принесет доход, если будет выполнено неравенство

$(-100(1+0{,}15) + 230)(1+ k_2) - 132 > 0$, что эквивалентно неравенству $k_2 > 14{,}8$. [101]

2.4.9. Средняя балансовая прибыль

Для полноты картины опишем еще один, достаточно часто используемый коэффициент - средняя балансовая прибыль **– AAR - (Average Accounting Return).** Существуют много различных определений AAR, но в каждом из них AAR определяется как

$$\frac{\textit{Некоторый показатель средней финансовой прибыли}}{\textit{Некоторый показатель средней балансовой стоимости}}.$$

В частности, его можно определить, как

$$\frac{\textit{Средний чистый доход}}{\textit{Средняя балансовая стоимость}}.$$

Пример 9

Вы рассматриваете трехлетний проект с планируемым чистым доходом $1000 в первый год, $2000 во второй год и $1500 в третий год. Стоимость проекта составляет $9000 при ликвидационной стоимости $400 после 3-х лет прямолинейной амортизации. Чему равна средняя балансовая прибыль (AAR)?

Чтобы рассчитать AAR, нам потребуется сначала определить средний чистый доход и среднюю балансовую стоимость:

Средний чистый доход = *($1000 + 2000 + 1500)/3 = $1500.*

Средняя балансовая стоимость = (9000 – 400) /2 = $4300.

Таким образом, средняя балансовая прибыль:

AAR = 1500/4300 = 34,88%.

Преимущество AAR заключается в том, что являясь отношением двух бухгалтерских чисел, он почти всегда может быть легко вычислен, поскольку может быть получена необходимая бухгалтерская информация.

Недостатки, которые делают этот коэффициент малополезным при планировании капиталовложений, это игнорирование стоимости денег во времени и опора на бухгалтерские (балансовые) данные, а не на рыночную стоимость.

В заключение, сформулируем порядок действий при анализе инвестиционного проекта:

Составить таблицу денежных потоков CF и вычислить IRR.

Далее:

а) если проект не имеет IRR (соответствующее уравнение не имеет положительных корней), принять решение, зная, что деньги, вложенные в этот проект, не вернутся;

в) если проект имеет 1 значение IRR (соответствующее уравнение имеет 1 положительный корень), принять решение, зная, что проект принесет доход при стоимости капитала меньшей, чем значение IRR;

с) если проект имеет несколько значений IRR – ситуация множественного IRR (соответствующее уравнение имеет несколько положительных корней) следует ориентироваться на значение NFV.

При вычислении NFV нужно начать с определения стоимости капитала, затем по ней найти период дисконтированного возврата — точнее, определить период, в конце которого кумулятивный денежный поток становится неотрицательным и, начиная со следующего периода, вместо значения стоимости капитала использовать ставку реинвестирования.

Если речь идет о выборе одного из нескольких взаимоисключающих проектов следует ориентироваться на проект с максимальным значением NFV.

§2.5. Методы амортизации на языке прогрессий

Амортизация определяется как распределение первоначальной стоимости внеоборотного актива на период его эксплуатации каким-либо разумным способом, принимающим во внимание ликвидационную стоимость этого актива.

Говоря про амортизацию в этом параграфе, будем понимать ее как бухгалтерский термин, используемый для списания стоимости производственных активов в течение времени их полезного функционирования. В этом смысле амортизация не отражает напрямую физический и моральный износ объекта, а также изменение его рыночной стоимости. [12, 13, 35, 36, 141]

Например, под воздействием инфляции, текущая рыночная цена объекта может быть выше, чем в прошлом, но в бухгалтерских записях такая ситуация невозможна. [141, 100 с.]

2.5.1. Производственная амортизация

Метод начисления износа пропорционально объему выполненных работ (производственный – production method) исходит из принципа, гласящего, что амортизация является только результатом объектом эксплуатации. В этом случае, объекту амортизации сопоставляется количество эксплуатационных единиц - количество километров, которое должен пройти автомобиль, количество деталей, которое должно быть обработано на данном станке, количество листов, которое должно пройти через копировальный аппарат и т.п., - до списания.

Амортизационные расходы на эксплуатационную единицу определяются формулой $d = \dfrac{\text{Первоначальная стоимость} - \text{Ликвидационная стоимость}}{\text{Количество эксплуатационных единиц}}$.

Обозначив через x_n остаточную стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n, через q_n количество эксплуатационных единиц, использованных за период с номером n, получим разностное уравнение

$$x_n = x_{n-1} - dq_n,$$

которое позволяет формализовать процесс начисления амортизации. [38]

Пример 1

Пусть пробег грузовика, приобретенного за $10 000 и имеющего ликвидационную стоимость $500, рассчитан на 100 000 километров.

Тогда амортизационные расходы на километр равны

$$d = \frac{10000 - 500}{100000} = 0{,}095.$$

Если предположить, что при эксплуатации за первый год грузовик имел пробег в 30 000 км, за второй год – 50 000 км и за третий – 20 000 км, то остаточная стоимость составит на конец:

1-го года: $x_1 = 10\,000 - 0{,}095 \cdot 30\,000 = 7150;$

2-го года: $x_2 = 7\,150 - 0{,}095 \cdot 50\,000 = 2400;$

3-го года: $x_3 = 2\,400 - 0{,}095 \cdot 20\,000 = 500.$ [38]

2.5.2. Метод равномерного (прямолинейного) списания

Метод равномерного (прямолинейного) списания (straight-line method) основан на предположении о том, что актив приносит равноценную пользу в течение всего периода его эксплуатации.

Величина амортизационных отчислений для каждого периода ($\boldsymbol{d}$) рассчитывается путем деления амортизируемой стоимости (первоначальная стоимость объекта минус его ликвидационная стоимость) на число отчетных периодов эксплуатации объекта.

Обозначив, как и в пункте 1, через x_n остаточную стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n , получим очень простое разностное уравнение

$$x_n = x_{n-1} - d, \qquad (2.5.1)$$

которое имеет решение

$$x_n = x_0 - n \cdot d \ . \qquad (2.5.2)$$

Стоит отметить, что уравнение (2.5.1) определяет арифметическую прогрессию, и более подробно об этом будет говориться в следующем разделе. [38]

Пример 2

Пусть станок, приобретенный за $5 000 и имеющий ликвидационную стоимость $100, предположительно будет использоваться 7 лет. При этом, отчетным периодом для данной фирмы является полугодие.

Тогда, амортизационные отчисления за полугодие равны

$$d = \frac{5000 - 100}{14} = 350,$$

а остаточная стоимость амортизируемого объекта на конец любого периода легко находится из уравнения $x_n = x_{n-1} - 350$ и начального условия $x_0 = 5000$ по формуле (2.5.2).

Например, остаточная стоимость на конец:

5-го периода $x_5 = 5000 - 5 \cdot 350 = 3250;$

4-го года $x_8 = 5000 - 8 \cdot 350 = 2200;$

7-го года $x_{14} = 5000 - 14 \cdot 350 = 100.$ [38]

2.5.3. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Существует несколько вариантов определения арифметической прогрессии. Но, к сожалению, эти определения не показывают, почему принято такое название. Поэтому, мы предлагаем следующее определение

Последовательность, значение каждого члена которой (за исключением крайних) является средним арифметическим значений соседних членов, называется арифметической прогрессией:

$$x_n = (x_{n+1} + x_{n-1})/2.$$

Умножив на 2 и перегруппировав, получим уравнение:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0, \qquad (2.5.3)$$

Перепишем уравнение (2.5.3) в виде

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} \qquad (2.5.4)$$

Из (2.5.4) следует, что разность двух соседних членов арифметической прогрессии всегда постоянна. Это число называется разностью, и обычно обозначается буквой d.

В итоге, получаем разностное уравнение

$$x_n = x_{n-1} + d, \qquad (2.5.5)$$

которое, обычно, принимают за определение арифметической прогрессии.

Нетрудно заметить, что уравнение (2.5.5) есть частный случай линейного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$x_n = ax_{n-1} + b. \qquad (2.5.6)$$

Для того чтобы получить формулу для решения уравнения (2.5.5), используем равенство

$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+2} - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_m)$, (предполагаем, что n больше m), которое в силу (2.5.5) можно переписать, как $x_n - x_m = (n - m)d$ и получим формулу, связывающую два любых члена арифметической прогрессии

$$x_n = x_m + (n - m)d. \qquad (2.5.7)$$

Напомним, что формула для нахождения суммы N членов арифметической прогрессии с первым членом x_0 и знаменателем d имеет вид:

$$S_N = \frac{2x_0 + (N-1)d}{2}N = \frac{x_0 + x_{N-1}}{2}N = \frac{x_k + x_{N-k}}{2}N.$$

Как было отмечено выше, при использовании метода равномерного (прямолинейного) списания разность остаточных стоимостей двух соседних периодов ($\boldsymbol{d}$) есть разность арифметической прогрессии. Оказывается, что при использовании другого, не менее популярного метода – метода уменьшающегося остатка, отношение остаточных стоимостей двух соседних периодов ($\boldsymbol{q}$ – коэффициент амортизации) есть знаменатель геометрической прогрессии.

В связи с этим, прежде чем приступить к изложению этого метода, немного поговорим о геометрических прогрессиях.

Последовательность, значение каждого члена которой (за исключением крайних) является средним геометрическим значений соседних членов, называется геометрической прогрессией

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}} \qquad (2.5.8)$$

Возведем равенство (2.5.8) в квадрат $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$,

а затем перепишем в виде

$$x_n / x_{n-1} = x_{n+1} / x_n . \qquad (2.5.9)$$

Из (2.5.9), получаем, что отношение соседних членов геометрической прогрессии всегда постоянно. Это число называется знаменателем геометрической прогрессии и, обычно, обозначается буквой q. Отсюда следует, что линейное разностное уравнение первого порядка $x_n = qx_{n-1}$ определяет члены геометрической прогрессии, а хорошо известная формула $x_n = x_0 q^n$ связывает члены геометрической прогрессии.

2.5.4. Метод уменьшающегося остатка

Многие виды основных средств приносят максимальную пользу в первые годы их эксплуатации. Поэтому, исходя из принципа сопоставимости, было бы неверно начислять амортизацию подобных активов равными порциями. При этом следует принять во внимание не только физическое, но и моральное устаревание. В связи с этим, в бухгалтерском учете применяются ускоренные методы амортизации.

Одним из наиболее популярных методов такого типа является метод уменьшающегося остатка (declining-balance method), который также называют методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимостью.

Обозначив, как обычно, через x_n остаточную стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n , опишем метод уменьшающегося остатка, как линейное разностное уравнение

$$x_n = qx_{n-1} \quad , \qquad (2.5.10)$$

с условиями

x_0 = *первоначальная стоимость* и x_N = *ликвидационная стоимость*.

Тогда, имеет место формула $x_n = x_0 q^n$, где изменение остаточной стоимости определятся коэффициентом амортизации [38]

$$q = \sqrt[N]{\frac{x_N}{x_0}} \qquad (2.5.11)$$

Пример 3

Пусть копировальный аппарат, приобретенный за $2 000 и имеющий ликвидационную стоимость $50, предположительно будет использоваться 8 лет.

Тогда, из формулы (2.5.11), коэффициент амортизации $q = \sqrt[8]{\frac{50}{2000}} = 0{,}63$.

То есть, предполагается, что к концу каждого года остается 63% от стоимости на начало года, или, другими словами, стоимость аппарата ежегодно уменьшается на 37%. Соответственно, разностное уравнение, связывающее остаточные стоимости амортизируемого объекта в соседние периоды, в данном случае имеет вид $x_n = 0{,}63x_{n-1}$.

Отсюда легко видеть, что к концу 1-го года остаточная стоимость копировального аппарата будет $x_1 = 0{,}63x_0 = 0{,}63 \cdot 2000 = 1260;$

к концу 2-го года $x_2 = 0{,}63x_1 = 0{,}63 \cdot 1260 = 793{,}8;$

…

к концу 8-го года $x_8 = 0{,}63x_7 = (0{,}63)^8 x_0 = (0{,}63)^8 \cdot 2000 = 49{,}63.$

Небольшое отличие величины x_8 от ликвидационной стоимости $50 объясняется погрешностями округления. [38]

Замечание

Небольшая проблема имеет место, если предполагать, что ликвидационная стоимость равна нулю. Тогда из формулы (2.5.11) будет следовать, что вся стоимость должна быть амортизирована за 1 период. Для того чтобы избежать подобной ситуации необходимо договориться о том, что всегда имеет место ликвидационная стоимость, и это вполне согласуется с практикой. Возможно, достаточно считать, что ликвидационная стоимость не меньше, чем 5% от начальной стоимости актива. [38]

2.5.5. Метод двойного уменьшения остатка

Близким «родственником» метода уменьшающегося остатка является метод уменьшающегося остатка при двойной норме амортизации (double-declining-balance method).

В этом случае коэффициент амортизации полагают равным $1-\frac{2}{N}$,

где N есть число отчетных периодов эксплуатации объекта. [38] (Отметим, что вместо числа 2 может применяться другое число, но чаще всего употребляется 2.)

Пример 4

Пусть оборудование, приобретенное за $5 000 и имеющее ликвидационную стоимость $500, будет использоваться 5 лет.

Тогда, коэффициент амортизации равен $1-\frac{2}{5}=0,6$. [38]

Поэтому,

$x_1 = 0,6x_0 = 0,6\cdot 5000 = 3000;$

$x_2 = 0,6x_1 = (0,6)^2 x_0 = (0,6)^2\cdot 5000 = 1800;$

$x_3 = 0,6x_2 = (0,6)^3 x_0 = (0,6)^3\cdot 5000 = 1080;$

$x_4 = 0,6x_3 = (0,6)^4 x_0 = (0,6)^4\cdot 5000 = 648;$

$x_5 = 0,6x_4 = (0,6)^5 x_0 = (0,6)^5\cdot 5000 = 388,8.$

Имеет место нестыковка — число 388,8 не есть ликвидационная стоимость. Это имеет место потому, что коэффициент амортизации $1-2/N$ не связан с первоначальной и ликвидационной стоимостью. [38]

Для того чтобы исправить этот недостаток метода уменьшающегося остатка при двойной норме амортизации в данной ситуации, коэффициент амортизации 0,6 будем применять до предпоследнего периода, а в последнем периоде просто отнимем сумму, необходимую для выхода на ликвидационную стоимость:

$x_5 = 648 - 148 = 500.$ [38]

Более курьезная ситуация будет иметь место, если предположить, что ликвидационная стоимость равна $1000. [38]

В этом случае, использование коэффициента амортизации 0,6, необходимо ограничить третьим периодом, а амортизацию в четвертом и пятом периодах провести прямолинейным методом:

$x_4 = 1080 - 40 = 1040;$

$x_5 = 1040 - 40 = 1000.$ [38]

К сожалению, метод уменьшающегося остатка при двойной норме амортизации имеет и другой существенный недостаток — может иметь место ситуация, в которой, начиная с некоторого периода, при амортизации этим методом будет списываться сумма меньшая, чем при прямолинейной амортизации, что противоречит идее ускоренной амортизации. Этот недостаток, опять же вызван тем, что коэффициент амортизации $1 - 2/N$ не связан с первоначальной и ликвидационной стоимостью. [38]

Пример 5

Покажем, как будет произведена амортизация копировального аппарата из примера 3 методом двойного уменьшения остатка. Так как аппарат предполагается использовать 8 лет, коэффициент амортизации равен

$1 - 2/8 = 0,75$, и, соответственно, имеет место уравнение $x_n = 0,75x_{n-1}$. [38]

Тогда,

$x_1 = 0,75x_0 = 0,75 \cdot 2000 = 1500;$

$x_2 = 0,75x_1 = (0,75)^2 x_0 = (0,75)^2 \cdot 2000 = 1125;$

$x_3 = 0,75x_2 = (0,75)^3 x_0 = (0,75)^3 \cdot 2000 = 843,75;$

$x_4 = 0,75x_3 = (0,75)^4 x_0 = (0,75)^4 \cdot 2000 = 632,81;$

$x_5 = 0,75x_4 = (0,75)^5 x_0 = (0,75)^5 \cdot 2000 = 474,61;$

$x_6 = 0,75x_5 = (0,75)^6 x_0 = (0,75)^6 \cdot 2000 = 355,96;$

$x_7 = 0,75x_6 = (0,75)^7 x_0 = (0,75)^7 \cdot 2000 = 266,97.$

Начисление на износ за последний, 8-й год должно быть произведено так, чтобы выйти на ликвидационную стоимость $50.

Следовательно, амортизационные отчисления за 8-й год равны

$$266,97 - 50 = 216,97.$$

Но даже в четвертом периоде, не говоря о последующих периодах, была амортизирована сумма меньшая, чем $216,97$: $843,75 - 632,81 = 210,94$.

Для того чтобы преодолеть это противоречие, согласно теории, амортизация путем «двойного уменьшения» производится до тех пор, пока амортизационные отчисления будут превышать амортизационные отчисления, соответствующие прямолинейному методу. Дальнейшее списание производится прямолинейным методом. [38]

Для того чтобы провести амортизацию методом уменьшающегося остатка при двойной норме амортизации, рекомендуем:
используя коэффициент амортизации $1 - 2/N$ подсчитать значение x_N:

$$x_N = x_0(1 - 2/N)^N. \ [38]$$

а) Если оно меньше, чем ликвидационная стоимость, то остаточная стоимость в периоде с номером n будет определяться формулой $x_n = x_{n-1}(1 - 2/N)$ до тех пор, пока x_n не станет меньше ликвидационной стоимости. Далее, начиная со значения x_{n-1}, остаточные стоимости следует определить прямолинейным методом (см. пример 4). [38]

б) Если оно больше, чем ликвидационная стоимость, то следует последовательно вычислять остаточную стоимость формулой $x_n = x_{n-1}(1 - 2/N)$ и на каждом шаге сравнивать списываемую величину $q_n = x_{n-1}(2/N)$, с величиной соответствующей прямолинейному методу:

$$d_n = \frac{x_{n-1} - ликвидационная\ стоимость}{N-(n-1)}.$$

Начиная с периода, в котором величина q_n впервые станет меньше d_n, амортизация должна производиться прямолинейным методом. [38]

Проиллюстрируем пункт б), вернувшись к примеру 5.

Здесь,

$q_1 = 0,25 \cdot 2000 = 500$ больше, чем $d_1 = \dfrac{2000-50}{8} = 243,75$;

$q_2 = 0,25 \cdot 1500 = 375$ больше, чем $d_2 = \dfrac{1500-50}{7} = 207,14$;

$q_3 = 0,25 \cdot 1125 = 281,25$ больше, чем $d_3 = \dfrac{1125-50}{6} = 179,17$;

$q_4 = 0,25 \cdot 843,75 = 210,94$ больше, чем $d_4 = \dfrac{843,75-50}{5} = 158,75$;

$q_5 = 0,25 \cdot 632,81 = 158,20$ больше, чем $d_5 = \dfrac{632,81-50}{4} = 145,70$;

$q_6 = 0,25 \cdot 474,61 = 118,65$ меньше, чем $d_6 = \dfrac{474,61-50}{3} = 141,54$.

Итак, в 6-ом периоде, амортизационные отчисления, соответствующие «двойному уменьшению» стали меньше отчислений, соответствующих прямолинейному методу.

Следовательно, остаточная стоимость 6-го периода будет не *355,96*, а, согласно методу равномерной амортизации,

$$474,61 - 141,54 = 333,07.$$

Далее, остаточная стоимость 7-го периода $333,07 - 141,54 = 191,53$, 8-го периода: $191,53 - 141,54 = 50$. (Небольшая неточность в последнем вычислении определяется погрешностями ранее произведенных округлений)

2.5.6. Метод суммы чисел

Вышеизложенные методы амортизации демонстрируют, как арифметическая и геометрическая прогрессии используются в бухгалтерском учете. Но, видимо, для того чтобы подчеркнуть необходимость почтительного отношения к прогрессиям, в еще одном популярном методе – методе списания стоимости по сумме чисел (sum-of-the-periods'-digits method) – элементы арифметической прогрессии используются дважды. [38]

Для того чтобы производить расчеты по этому методу необходимо вычислить сумму $s = 1 + 2 + \dots + N$, где N – число периодов предполагаемого срока службы объекта. (Так как имеет место сумма членов арифметической прогрессии, число s равно $\frac{N\cdot(N+1)}{2}$.)

Далее, разделив амортизируемую стоимость на s, получим расчетный коэффициент d:

$$d = \frac{\text{Первоначальная стоимость} - \text{Ликвидационная стоимость}}{N\cdot(N+1)/2}.$$

Затем, умножив коэффициент d на число $(N- n +1)$ получим сумму, которая должна быть амортизирована за период с номером n. [38]

Тогда, если x_n - остаточная стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n, то

$x_1 = x_0 - Nd;$

$x_2 = x_1 - (N-1)d = x_0 - Nd - (N-1)d;$

$x_3 = x_2 - (N-2)d = x_0 - Nd - (N-1)d - (N-2)d;$

…

$x_N = x_N - d = x_0 - Nd - (N-1)d - (N-2)d - \dots - d.$

Перепишем выражение

$$x_n = x_0 - Nd - (N-1)d - \dots - (N-n+1)d,$$

в виде

$$x_n = x_0 - [N + (N-1) + \dots + (N-n+1)]d,$$

и воспользовавшись тем, что внутри квадратных скобок стоит сумма членов арифметической прогрессии, получим формулу для вычисления остаточной стоимости амортизируемого объекта на конец периода с номером n: [38]

$$x_n = x_0 - dn\left(N - \frac{n-1}{2}\right). \qquad (2.5.12)$$

<u>Пример 5</u>

Фирма купила оборудование за \$7000 и собирается использовать его в течение семи лет. Ликвидационная стоимость \$98. Так как бухгалтерские отчеты в фирме составляются ежеквартально, для учета амортизации используется метод суммы чисел, рассчитанный на 28 периодов. [38]

Тогда, расчетный коэффициент $d = \dfrac{7000 - 98}{28 \cdot (28+1)/2} = 17.$

По итогам 1-го квартала будет списано $17 \cdot 28 = 476$ долларов, а остаточная стоимость будет равна $7000 - 476 = \$6524$.

По итогам 2-го квартала будет списано $17 \cdot 27 = 459$ долларов, а остаточная стоимость будет равна $6524 - 459 = \$6065$.

Для того чтобы рассчитать остаточную стоимость по итогам пяти лет воспользуемся формулой (14):

$x_{20} = 7000 - 17 \cdot 20\left(28 - \dfrac{20-1}{2}\right) = 7000 - 6290 = \$710.$ [38]

2.5.7. Для удобства, в данном пункте собраны формулы, позволяющие рассчитать амортизацию в случаях использования методов, описанных выше. [38] Пусть

N – число периодов предполагаемого срока службы объекта;

x_n - остаточная стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n;

x_0 - первоначальная стоимость амортизируемого объекта;

x_N - ликвидационная стоимость амортизируемого объекта.

Тогда для метода:

1) начисления износа пропорционально объему выполненных работ (производственного) $x_n = x_0 - d(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$,

Здесь q_m количество эксплуатационных единиц, использованных за период с номером m, $d = \dfrac{x_0 - x_N}{Q}$, Q - количество эксплуатационных единиц за весь срок службы объекта; [38]

2) равномерного (прямолинейного) списания

$$x_n = x_0 - n\,d, \quad \text{где } d = \frac{x_0 - x_N}{N};$$

3) уменьшающегося остатка

$$x_n = x_0\, q^n, \qquad \text{где } q = \sqrt[N]{\frac{x_N}{x_0}}\;;$$

4) списания стоимости по сумме чисел

$$x_n = x_0 - dn\left(N - \frac{n-1}{2}\right), \quad \text{где } d = \frac{2(x_0 - x_N)}{N(N+1)}.$$

5) Для того чтобы провести амортизацию методом уменьшающегося остатка при двойной норме амортизации, рекомендуем:

используя коэффициент амортизации $1 - \dfrac{2}{N}$ подсчитать значение x_N:

$$x_N = x_0\left(1 - \frac{2}{N}\right)^N.$$

а) Если x_N меньше, чем ликвидационная стоимость, то остаточная стоимость в периоде с номером n будет определяться формулой $x_n = x_{n-1}(1 - 2/N)$ до тех пор, пока x_n не станет меньше ликвидационной стоимости. Далее, начиная со значения x_{n-1}, остаточные стоимости следует определить прямолинейным методом. [38]

б) Если x_N больше, чем ликвидационная стоимость, то следует последовательно вычислять остаточную стоимость формулой $x_n = x_{n-1}(1 - 2/N)$ и на каждом шаге сравнивать списываемую величину $q_n = x_{n-1}(2/N)$, с величиной соответствующей прямолинейному методу:

$$d_n = \frac{x_{n-1} - \textit{ликвидационная стоимость}}{N - (n-1)}.$$

Начиная с периода, в котором величина q_n впервые станет меньше d_n, амортизация должна производиться прямолинейным методом. [38]

После того как мы обсудили различные методы амортизации, можно сделать очень любопытный вывод — оказывается в основе всех этих методов лежат свойства арифметической и геометрической прогрессий. И соответственно, даже такая дисциплина как бухгалтерский учет не обходится без математики [37, 38].

Заключение по главе 2

Известный российский ученый, специалист по математическим методам в экономике, Алексей Савватеев, в своей книге «Математика для гуманитариев» пишет: «Моя старшая дочь не могла в свое время решить задачу: есть 3 апельсина и 2 яблока, сколько всего фруктов? Она совершенно не понимала, как можно сложить яблоки с апельсинами. Это же совершенно про разное. Мне кажется, что это типичное гуманитарное мышление. Человек фокусируется на содержании предмета и не может от него уйти» [68]. В связи с этим, я вспоминаю своего школьного учителя математики Н.Д. Нестерова, знаменитого в городе Нарын Никдима, который, зачастую с использованием ненормативной лексики, внушал учащимся, что нельзя складывать сапоги с ботинками.

Используя терминологию «яблок и апельсинов», скажем, что первый параграф посвящен обобщению и пониманию того, что сложение возможно, если рассматривать их как фрукты: три фрукта плюс два фрукта будет пять фруктов. Дело в том, что при преподавании финансовых вычислений часто рассматривается множество различных ситуаций: Сложный интерес, Будущее значение аннуитет, Исходное значение аннуитета, Амортизация, … . [69 - 85]

Оказалось, что есть возможность рассматривать все эти ситуации как на вариации одной общей, описываемой линейным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами [86 - 90].

Во втором параграфе рассмотрены формулы, позволяющие находить оценочную стоимость акций на основе предполагаемого потока будущих дивидендов [60, 77, 79, 84]. Получены формулы для ранее не рассматривавшихся в экономической теории случаев: акций с арифметическим ростом дивидендов и акций с псевдо-арифметическим ростом дивидендов. Существование акций, дивиденды которых на достаточно продолжительном временном участке растут указанным образом подтверждается данными о фактически выплаченных дивидендах. В силу очень маленького объема фондового рынка в Кыргызстане, эти результаты носят, скорее всего, теоретический характер. Но есть надежда на то, что

Кыргызстан со временем будет иметь нормально развитый фондовый рынок, на котором будет покупаться и продаваться большое количество акций. [91 - 93]

Третий параграф описывает тему, которая «на слуху» — ипотеку [56, 57, 77]. И в этой сфере Кыргызстан в числе отстающих [94]. Несмотря на сложную ситуацию в банковском секторе, мы убеждены, что есть большой потенциал для быстрого наращивания объемов ипотечного кредитования. Существенную помощь в этом может оказать использования новых, для Кыргызской Республики, видов ипотеки. В работе разработан математический аппарат составления схем выплат различных ипотечных кредитов [95-99].

Кыргызстан нуждается в ускоренном росте своей экономики. Большой вклад в эту деятельность может внести использование современных методов оценки инвестиционных проектов [59, 77, 79, 81]. В четвертом параграфе второй главы изложен новый взгляд на вычисление инвестиционных коэффициентов, основанный на разностных уравнениях. Логическим завершением этого подхода является предложение нового инвестиционного коэффициента — Чистой будущей стоимости проекта (NFV). Использование этого коэффициента, особенно в условиях высокой стоимости капитала, позволит расширить число проектов, которые могут быть реализованы. Теоретический и практический интерес может вызвать формула, связывающая значения индекса рентабельности и индекса NPV. Она говорит, что вычисление индекса рентабельности, при наличии NPV не приносит никакой дополнительной информации. [100-104].

В пятом параграфе данной главы показано, что многочисленные методы амортизации имеют простую математическую основу. Как говорил знаменитый инвестор Уоррен Баффетт: «Руководителям и владельцам не следует забывать, что бухгалтерский учёт лишь дополнение к деловому мышлению, а никак не его замена».

ГЛАВА 3
АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМИ МЕТОДАМИ

Математика является замечательным инструментом познания. При этом странным образом сложилась парадоксальная ситуация: при изучении математики большее внимание уделяется самой математике, а не ее приложениям. Другими словами, изучается больше сам инструмент, а не способы его применения. Конечно, инструменты нужно создавать, совершенствовать, но в первую очередь инструменты нужно использовать.

Инструменты должны быть удобны для использования. Поэтому задача совершенствования методов решения различных математических проблем всегда будет актуальной.

В этой главе мы показываем, как статистика и разностные уравнения используются для анализа экономики.

Еще Гомер говорил, что *глупец познает только то, что свершилось*. [117]. Ему вторил древнеримский писатель Теренций (ок. 195 – ок. 159 гг. до н.э.) - *Быть мудрым – значит видеть не только то, что под ногами, но и предвидеть будущее*. [117].

§3.1. Экономические предпосылки Кыргызских революций

В начале этой главы считаем уместным привести материалы докладов, которые были представлены на международных конференциях в КЭУ и АУЦА в 2017-2019 годах, тесно связанные с административной стороной финансов.

Мы убеждены, что для наведения порядка в финансовой сфере Кыргызской Республики нужно повысить финансовую грамотность как населения, так и сотрудников этой сферы. В то же время руководство страны должно предпринять решительные шаги для переориентации деятельности банковского сектора, с тем чтобы, добиваясь максимизации собственной прибыли, он способствовал экономическому росту страны.

Любая экономическая теория начинается с данных статистики, а верность ее выводов, опять же, проверяется статданными. [115] Так, причинами многих недостатков, имеющих место в экономической и других сферах социальной жизни Кыргызской Республики, чиновники называют последствия революций 2005 и 2010 годов. Однако аккуратный анализ статистических данных показывает, что скорее всего имеет место противоположная ситуация: революции были во многом порождены слабыми результатами развития экономики.

Успехи стран в экономике во много определяются показателем роста Валового Внутреннего Продукта. При этом, следует отметить, что для некоторых стран этот индекс является весьма изменчивым. В частности, для Кыргызстана, в последние годы он во многом определяется результатами работы золоторудного комбината Кумтор. Поэтому, для того чтобы иметь более объективную картину в работе используются кумулятивные (накопленные) показатели. [115]

В 2021 году Кыргызская Республика будет отмечать 30 годовщину своей Независимости. Но к сожаленью, вряд ли возможно говорить о полной независимости. Великий сын турецкого народа Мустафа Кемаль Ататюрк говорил, что полная независимость возможна только при экономической независимости. А состояние экономики Кыргызстана, ее развитие не дают оснований для оптимизма. Нужно низко поклониться кыргызским мигрантам, которые переводят на свою родину более 2,5 миллиардов долларов США в год. Сравнив эту сумму с величиной Внутреннего Валового Продукта (ВВП) страны, можно сделать однозначные выводы о том, что об экономической независимости говорить еще рано.

3.1.1. В данном параграфе мы прослеживаем связь между показателями, характеризирующими изменение внутреннего валового продукта, и некоторыми значимыми событиями в жизни стран СНГ (Содружество Независимых Государств). [115] Далее, мы пытаемся, в общих чертах сформулировать то, что нужно делать, для того чтобы экономическое развитие Кыргызской Республики шло более быстрыми темпами.

Успехи стран в экономике во много определяются показателем роста ВВП. При этом, следует отметить, что для некоторых стран этот индекс является весьма изменчивым. В частности, для Кыргызстана, в последние годы он во многом определяется результатами работы золоторудного комбината Кумтор. [115] Так, по итогам первого полугодия 2018 года, по сравнению с первым полугодием 2017 года, Кыргызская Республика имеет самый маленький прирост ВВВ среди стран СНГ — одна десятая процента [61]. В то же время, если исключить из рассмотрения показатели Кумтора, то остальная часть экономики Кыргызстана показала рост 2,1%, что соответствует среднему показателю по СНГ. Поэтому, более объективную картину можно наблюдать, рассматривая кумулятивные (накопленные) показатели. [115] Рассмотрим таблицу (таблица 3.1.1), составленную на основе данных статкомитета стран СНГ [61] и Мирового Банка [62].

Таблица 3.1.1. – Динамика валового внутреннего продукта (в постоянных ценах, 2000 год = 100)

	2001	**2004**	**2005**	**2009**	**2010**	**2013**	**2014**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Азербайджан	110	149	188	384	403	436	448	436	436	443	452
Армения	110	156	178	210	215	249	258	266	279	294	316
Беларусь	105	131	143	189	204	221	224	210	215	222	224
Казахстан	114	149	164	206	221	264	275	281	292	304	318
Кыргызстан	105	121	120	150	149	175	182	197	206	214	223
Молдова	106	131	141	154	165	191	201	208	216	225	236
Россия	105	127	135	153	160	175	176	170	173	177	180
Таджикистан	110	149	159	205	218	271	289	328	351	378	406
Туркменистан	120	188	212	317	346	487	537	607	646	686	729
Узбекистан	104	121	130	180	195	247	267	311	327	345	364
Украина	109	141	145	146	152	161	150	138	141	146	148

Источник: Данные с сайтов статкомитета стран СНГ и Мирового Банка.

Обратим внимание на Кыргызстан. Можно видеть, что и в 2005 и 2010 годах — годах, отмеченных революциями, Кыргызстан имел наихудшие показатели. Возможно, как любят оправдываться некоторые чиновники, эти показатели порождены слабыми показателями «революционного» года. Нет! Они ставят телегу впереди лошади. Такие же слабые показатели у Кыргызстана и в 2004 и 2009 годах. То есть, одна из главных причин революций — плохая экономика. В этом нет ничего нового: все по Карлу Марксу. [115]

Критически настроенный коллега может сказать, что это совпадения. Давайте поанализируем еще.

В 2004 году такие же показатели как у Кыргызстана были и у Узбекистана. Обратившись к Википедии, можно вспомнить, что 13 мая 2005 года в Андижане имели место беспорядки. В числе причин названы: недовольство экономической политикой властей, арест 23 бизнесменов по обвинению в экстремизме, задержания демонстрантов у здания суда 12 мая. [115]

Результаты 2009 года плохие и у Украины. Скорее всего этим вызвана смена власти: в результате президентских выборов, на место Виктора Ющенко, набравшего очень мало голосов, пришел Виктор Янукович.

После 2010 года самые худшие показатели у Украины. Все мы знаем, что за этот период там сменилась власть (Виктор Янукович, президент Украины, свергнут Майданом в феврале 2014 года) и имеет место крайне нестабильная ситуация. [115]

По итогам 2016, 2017 годов самые слабые результаты имеют Украина и Россия. Проблемы Украины общеизвестны. [115]

Проблемы в экономике России во многом схожи с проблемами Кыргызстана, о которых будет говорится далее. Кроме того, они определяются санкциями со стороны Запада. При этом политическая ситуация стабильна. Мы объясняем это эффектом Путина — огромный авторитет В.В. Путина определяет спокойствие. [115]

3.1.2. Если брать в расчет кумулятивные показатели с 2010 года (таблица 3.1.2.), то у белорусского руководства должен быть повод для большого беспокойства. Будущее покажет, имеет ли место эффект, схожий с эффектом Путина — эффект «батьки». [115]

Таблица 3.1.2. Динамика валового внутреннего продукта [61]
(в постоянных ценах, 2010 год = 100)

	2011	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Азербайджан	100	112	109	109	111	113
Армения	106	110	111	117	125	135
Беларусь	106	106	103	106	109	111
Казахстан	107	126	127	132	138	144
Кыргызстан	106	127	132	138	144	150
Молдова	107	121	127	132	137	144
Россия	100	104	103	105	103	104
Таджикистан	107	140	150	161	173	186
Туркменистан	115	165	175	187	198	211
Узбекистан	108	147	159	167	168	176
Украина	105	89	91	93	96	98

Источник: Данные с сайтов статкомитета стран СНГ и Мирового Банка.

На первый взгляд, данные таблицы 3.1.2 указывают на вполне приемлемые показатели экономического роста экономики Кыргызской Республики. Однако, если принять во внимание очень низкую исходную базу, от которой отсчитываются показатели, а также сравнить 150% с результатами соседних постсоветских стран за тот же период: Таджикистан — 186%; Туркменистан — 211%; Узбекистан — 176%, то можно понять, что радоваться нечему.

Кстати, можно порадоваться за соседей — их экономический рост сравним с ростом наиболее быстро развивающихся в последние годы стран: Китаем, который с 2010 года вырос на 75% и Индией — на 67%. [115]

Еще более удручающая картина развития экономики Кыргызстана предстает нашему взгляду, если сравнить достигнутые результаты с намеченными планами. Указом Президента Кыргызской Республики 21 января 2014 года была утверждена «Национальная стратегия устойчивого развития Кыргызской Республики (НСУР) на период 2013-2017 годы». Главной целью этой стратегии было объявлено вхождение Кыргызстана в число развитых стран с высоким уровнем образования, здоровой окружающей средой, общественной стабильностью, международным имиджем благополучной страны, устойчивым ростом экономики и высокой привлекательностью для инвесторов. Стоит отметить, что многое достигнуто. Однако, одна из важнейших задач: достижение устойчивого роста экономики, решена не была. В Национальной стратегии устойчивого развития к 2017 году предусматривалось улучшение позиции Кыргызстана по целому ряду международных рейтингов и показателей. В том числе: довести уровень ВВП на душу населения до $2500. К сожалению, приходится констатировать, что эта цель, мало реальная с самого начала, осталась очень далекой: по итогам 2017 года ВВП Кыргызстана составил $7,6 миллиардов, и в пересчете на 6 миллионов населения, составил $1267 на душу населения [62].

3.1.3. Конечно, можно ссылаться на объективные и субъективные факторы, негативно воздействующие на развитие экономики Кыргызстана. Но, нужно, что-то делать! [115]

По нашему мнению, есть три основных «звена», взявшись за которые можно вытащить всю «цепь».

Первое звено. Нужно навести порядок в законах. Уже много лет говорится о реформе судебной системы, но «воз и ныне там». Данные почти всех опросов указывают на судебную систему как на несправедливую и коррумпированную. О том, что все начинается с законов, человечество поняло давным-давно. Как говорится в книге знаменитого мыслителя Томаса Гоббса (1588 - 1679) «Там, где ни за кем не обеспечены плоды его труда, нет места для трудолюбия, не земледелия, нет морской торговли, нет удобных зданий, …, нет ремесел, нет литературы, нет общества» [63]. Видимо, эта цитата, во многом дает ответ на вопрос, почему в Кыргызстане не развивается реальное производство.

Второе звено, которое тесно связано с первым. Как следует из высказывания Гоббса, человеку нужно «обеспечить плоды его труда». Для этого нужно государство, а для содержания государства нужны налоги. Но, довольно часто, налоговая система государства работает так, что не обеспечивает человека, а наоборот лишает его «плодов его труда».

Нужна реформа в налоговой сфере Кыргызстана. О том, что она работает плохо говорят очень многие факты. Так, в конце июня 2018 Госслужба по борьбе с экономическими преступлениями (ГСБЭП) сообщила, что по итогам 235 налоговых проверок субъектов предпринимательства, проведенных с начала года, доначислено налогов на 1 миллиард 332,6 миллиона сомов.

Следующий факт подобного рода. Государственная налоговая служба с начала 2018 года проверила 34 тысячи 566 субъектов предпринимательства. В итоге нарушения установлены у 12 тысяч 775 субъектов предпринимательства. То есть нарушения зафиксированы у 37% проверенных. А ведь есть и не зафиксированные. Можно сказать, что еще одна налоговая реформа ничего не даст. Конечно, не даст, если ее главной целью стремление налоговиков «знать обо всем, что происходит на производстве». Если же «провести налоговую реформу, нацелив ее на экономический рост», то что-то может получится. Отметим, что идея такой налоговой реформы взята из экономической программы президента США Д. Трампа.

Внесем некоторую конкретизацию. Уровень налоговой дисциплины, налогового сознания населения Кыргызстана очень низок и для того, чтобы поменять его нужно много времени. Поэтому, нужны простые в администрировании налоги. Так есть много примеров, доказывающих высокую эффективность паушального налога (налог в форме патента) в Кыргызстане. В то же время налог на прибыль, НДС и им подобные в условиях Кыргызстана имеют высокую коррупционную составляющую и малоэффективны. Для подтверждения, еще одно сообщение СМИ: Генеральная прокуратура совместно с прокуратурой Бишкека и столичным управлением Госслужбы по борьбе с экономическими преступлениями выявила причинение ущерба экономике страны на сумму более 800 миллионов сомов. Об этом сообщили в пресс-службе надзорного органа 20 марта 2018 года. Проверка установила, что созданная правительством комиссия по возмещению и возврату налога на добавленную стоимость (НДС) принимала незаконные и идущие в разрез с государственными интересами решения о возврате НДС отдельным частным компаниям. Председателем комиссии по возврату НДС был замминистра экономики, а членами комиссии — замминистра финансов, зампредседателя Государственной налоговой службы, завотделом Центрального казначейства, начальник управления Государственной таможенной службы, оперуполномоченный ГСБЭП и до 3 февраля 2017 года — замначальника управления ГКНБ.

Третье звено. Следует признать, что одной из основных причин слабого роста экономики является плохая работа банковского сектора.

3.1.4. Высокий уровень предпринимательства невозможен без развитой банковской системы. Домохозяйства должны быть заинтересованы в повышении уровня сбережений, а фирмы должны иметь доступ к денежным средствам, необходимым для финансирования своих проектов. Выполняет ли банковская система Кыргызской Республики свое предназначение? Мы считаем, что нет. Обоснуем эту точку зрения. [115]

По критерию легкости получения кредитов Кыргызстан занял 113 место в очередном отчете конкурентоспособности экономики (Global Competitiveness Index 2015-2016) в 140 странах мира, подготовленном World Economic Forum (Всемирным Экономическим Форумом) [64]. Проблемы с оформлением кредитов в сочетании с высокими ставками по кредитам приводят к тому, что кредитные ресурсы для предпринимателей Кыргызстана малодоступны. [115]

Во всех проводимых по соответствующей тематике опросах основными проблемами малого и среднего бизнеса в Кыргызстане называется нехватка недоступность кредитов. Согласно данным, за 2017 год, среди стран, попавших в отчет Мирового Банка, только Мадагаскар и Бразилия имеет худшие показатели по величине реальной ставки интереса — разности между ставкой по кредитам и уровнем инфляции. [115] Возможно, банкирам Кыргызстана нужно собрать деньги на богатые подарки коллегам из этих стран — в последние годы они не дают банковскому сектору Кыргызстана занять малопочетное первое место по этому показателю.

3.1.5. По нашему мнению, банковский сектор Кыргызской Республики практически не способствует развитию реальной экономики.

В связи с этим закономерен вопрос: КТО ВИНОВАТ? После ответа на этот вопрос необходимо постараться ответить на вопрос ЧТО ДЕЛАТЬ?

По нашему мнению, основной причиной плачевного состояния банковского сектора экономики Кыргызстана является его монополизация. Можно, конечно, пытаться опровергнуть это утверждение, говоря о том, что монополия имеет место, когда на рынке действует одна фирма, а в Кыргызстане более 20 банков. Это так, но дело в том, что они проводят одну и ту же политику, то есть фактически являются членами картеля – действуют так, словно являются подразделениями одной фирмы. Докажем это утверждение. Для этого продемонстрируем наличие основных признаков монополии на рынке банковских услуг Кыргызстана. [115]

I. На рынок банковских услуг Кыргызстана попасть очень сложно. Помимо выполнения требования о минимальном размере уставного капитала для вновь открываемых коммерческих банков (приблизительно 10 млн. долларов США) и желания работать на этом рынке, необходимо иметь «поддержку» в самых верхах кыргызской государственной машины. Имеется не один пример того, что известные по работе в других странах банковские бренды не смогли получить разрешение на работу в Кыргызстане. [115]

II. Характерным признаком наличия монополии является высокая цена на товары и услуги. В данной ситуации, в качестве цены можно рассматривать разность между ставкой по кредитам и депозитам. Для того чтобы показать, что в Кыргызстане эта ставка высока, приведем данные (таблица 3.1.3). [115] :

Таблица 3.1.3. - Ставка по кредитам минус ставка по депозитам (%) [65]

Страна	2017 год
Бразилия	*38,4*
Мадагаскар	*45*
Китай	*2,9*
Кыргызстан	***19,3***
Низшие из среднеразвитых стран (Lower middle income)	*6.1*
Малые страны (Small states)	*6,8*

Источник: Данные с сайта Мирового Банка.

III. Другим, столь же важным признаком, как и цена, при определении монополии является объем рынка. По нашему мнению, адекватным отражением этого показателя в банковском секторе является отношение объема выданных кредитов к величине ВВП страны (таблица 3.1.4). Картина здесь также удручающая: совокупный объем кредитов представленных частному сектору банковской системой Кыргызстана за 2017 год более чем в 4 раза меньше среднего показателя по всем странам мира. [115]

Таблица 3.1.4. Объем выданных кредитов, в % от ВВП. [65]

Страна	2017 год
Турция	*66,5*
Казахстан	*27*
Германия	*77,2*
Кыргызстан	***21,7***
Весь мир	*90*

Источник: Данные с сайта Мирового Банка.

Итак, на вопрос «КТО ВИНОВАТ в плачевном состоянии банковского сектора Кыргызстана?», можно ответить: «Монополизация этого сектора».

Стоит ли ожидать улучшения ситуации в ближайшем будущем?

По нашему мнению, вряд ли. Владельцам банков ничего делать не надо. Как известно даже младшекурсникам, из курса Микроэкономика, фирмы получают наибольшую прибыль в условиях монополии. Характерный факт. На вопрос бывшего в тот момент президентом Кыргызской Республики А.Ш. Атамбаева, о том, что делается для снижения ставок по кредитам, председатель Национального Банка КР Т. Абдыгулов ответил, что проводятся аукционы, на которых коммерческие банки получают деньги при ставке 5%, при условии, что они будут выдавать кредиты по ставкам не превышающим 12%. То есть, банкиры «на ровном месте» могут получать 7%. О таком, банкиры большинства стран мира могут только мечтать, а наши часто игнорируют эти аукционы — они имеют лучшие условия.

ЧТО ДЕЛАТЬ? Мы считаем, что проблему кредитов нужно решать кардинально: необходимо законодательно установить верхний потолок эффективной ставки интереса по кредитам на уровне равном *уровень инфляции + 7%*. Этот показатель должен высчитываться Статкомитетом ежеквартально. Соответственно, ставки по кредитам могут быть сделаны плавающими — определяться ежеквартально. Стоит отметить, что эта мера полностью соответствует экономической теории, которая рекомендует использовать верхний потолок цен на монополистическом рынке. [115]

Возможно, это будет сюрпризом для некоторых, почти во всех странах Европы существует ограничения ставок. Для того чтобы в этом убедиться достаточно набрать в поисковой системе Google термин interest rate cap. В частности, в самой банковской стране, Швейцарии, максимальная процентная ставка за пользование потребительским кредитом была установлена правительством Швейцарии в 2003 г. и составляет 15%. Подобные ограничения имеют место и в арабских странах. Так, в султанате Оман верхняя ставка по кредитам равна 7%. [115]

История свидетельствует, что наиболее фанатичными приверженцами религии являются новообращенные адепты. Видимо поэтому, некоторые наши руководители считают, что ни в коем случае нельзя вмешиваться в работу рынка. Но это правильно, если речь идет о конкурентном рынке. В случае монополии вмешиваться нужно обязательно. [115] Описывая действия администрации великого президента Франклина Рузвельта в сфере кредитования сельского хозяйства в США во время Великой Депрессии, Н.Н. Яковлев пишет: «Банкиры негодовали: вторжение правительства привело к тому, что вместо 14% и больше, с суммы займа они могли получать 5%». [66]

3.1.6. Понятно, что ограничение ставок по кредитам усложнит жизнь некоторым кредитным учреждениям. Но мы уверены, что если подкрепить этот шаг изменениями в сфере налогообложения баков, ограничение ставок пойдет на пользу как экономике Кыргызстана в целом, так и банковскому сектору в частности. Ведь планка на уровне (*уровень инфляции + 7%*) — это очень высокая ставка. К примеру, в Российской Федерации разница между средними ставками по кредитам и депозитам равна 5,6%, а средний показатель по всему миру еще ниже — он равен 5,5%. [115]

Более развернуто о предлагаемом изменении налогообложения. Мы предлагаем паушальный налог, более известный у нас как патент. Он должен выплачиваться ежеквартально, и быть равным налогу прошлого квартала, умноженному на повышающий коэффициент. Повышающий коэффициент будет определяться инфляцией прошлого квартала плюс 3%.

Например, если в 1-м квартале года X банк Альфа заплатил налог в размере 100 млн сомов, а цены выросли на 2%, то во 2-м квартале этот банк должен будет заплатить $100(1 + 0{,}02 + 0{,}03) = 105$ млн сомов. Экономическая теория говорит, что такая форма налогообложения побуждает к расширению объема деятельности и снижению издержек. Сейчас Кыргызстан вошел в Евразийский Экономический Союз. Одним из пунктов в ее программе является создание единой банковской системы. Но, в своем текущем состоянии банковская система Кыргызской Республики не конкурентоспособна. Поэтому, пора принимать срочные меры для повышения ее эффективности. Для этого Национальный Банк Должен пересмотреть свою политику. [115]

3.1.7. На данный момент, согласно документам, *Главной целью деятельности Национального банка Кыргызской Республики является достижение и поддержание стабильности цен, посредством проведения соответствующей денежно-кредитной политики.* [67]

То есть обеспечение роста ВВП не входит в круг обязанностей Национального Банка. Как ни странно, подобной позиции временами придерживается и правительство. [115]

31 марта 2016 года на заседании парламента, депутат А. Жапаров говоря о том, что экономика страны нуждается в деньгах, заявил, что главным инвестором в Кыргызстане должно быть само правительство, способное регулировать равноправное поступление средств в те или иные отрасли, оно же должно позаботиться о макроэкономике страны. В ответ, бывший в тот момент главой

правительства Темир Сариев сказал, что макроэкономике страны ничего не угрожает. [115] «Мы проводили совещание с Нацбанком по сохранению макроэкономической стабильности, мы удерживаем курс национальной валюты, под контролем держим уровень инфляции». Итак, и правительство и Национальный Банк озабочены обменным курсом и инфляцией. Стоит признать, что имеют место определенные успехи в этой деятельности. Но, по нашему мнению, эти достижения, не сопровождающиеся ростом ВВП мало чего, стоят. И провал в выполнении экономических задач Национальной Стратегии ярко демонстрирует этот факт. [115]

Конечно, в первые годы независимости, когда имела место гиперинфляция, достижение стабильности цен должно было быть главной целью Национального Банка. Но прошло время, и как сказал заместитель председателя НБКР Нурбек Жениш на международной конференции в АУЦА 14.09.2017, ситуация в экономике изменилась. Поэтому, правительство и Национальный Банк Кыргызской Республики должны пересмотреть свои цели, поставив во главу угла рост Внутреннего Валового Продукта. Будет хороший рост ВВП — и с инфляцией и обменным курсом все будет в порядке! [115]

§3.2. Изменение уровня безработицы, модель Эванса и другие приложения линейных разностных уравнений 1-го порядка

Основное значение при изучении линейных разностных и дифференциальных уравнений имеют уравнения первого порядка. Это обусловлено двумя основными причинами: Первой причиной является большая практическая значимость моделей, описываемых этими уравнениями. Вторая причина: методы решения уравнений высоких порядков и систем уравнений, изложенные в данной главе, сводят процесс их решения к решению уравнений первого порядка.

3.2.1. Линейным разностным уравнением 1-го порядка с произвольным свободным членом называется уравнение

$$x_n - ax_{n-1} = b_n, \qquad (3.2.1)$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-тый период; a и b_n являются коэффициентами уравнения.

Решением уравнения (3.2.1) называется формула, которая позволяет напрямую связать значения x_n и x_0 .

Для того чтобы получить решение, разделим уравнение (3.2.1) на a^n:

$$a^{-n} x_n - a^{-(n-1)} x_{n-1} = b_n a^{-n} .$$

и обозначив $a^{-к} x_к$ через $z_к$ получим, что уравнение (3.2.1) можно записать в виде

$$z_n - z_{n-1} = b_n a^{-n}. \qquad (3.2.2)$$

Так как $\quad z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \ldots + (z_2 - z_1) + (z_1 - z_0),$

в силу уравнения (3.2.2), получаем

$$z_n - z_0 = b_n a^{-n} + b_{n-1} a^{-n+1} + \ldots + b_1 a^{-1} . \qquad (3.2.3)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (3.2.3) на a^n, получим искомую формулу:

$$x_n = x_0 a^n + b_n + b_{n-1} a + \ldots + b_1 a^{n-1} = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} . \qquad (3.2.4)$$

Повторив выкладки, нетрудно увидеть, что формула (3.2.4) примет вид

$$x_n = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n} b_k^1 a^{n-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} b_k^m a^{n-k} , \qquad (3.2.5)$$

если коэффициент b_k есть сумма нескольких слагаемых: $b_k = b_k^1 + \ldots + b_k^m$.

Выражение $x_0 a^n$ называется общим решением однородного уравнения $x_n - ax_{n-1} = 0,$ а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

В частности, если:

a) $\quad b_k = b,$ то $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = b \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = b \frac{1-a^n}{1-a}$; $\qquad$ (3.2.5a)

b) $\quad b_k = hc^{k-1},$ то

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = h \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} a^{n-k} = \frac{h}{c} a^n \sum_{k=1}^{n} \frac{c^k}{a^k} = \frac{h}{c} a^n \frac{c}{a} \frac{1-c^n/a^n}{1-c/a} = h \frac{a^n - c^n}{a-c} ; \qquad (3.2.5b)$$

c) $\quad b_k = ga^{k-1},$ то $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = g \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} a^{n-k} = gna^{n-1}.$ $\qquad$ (3.1.5c)

d) $b_k = f(k-1)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = f\sum_{k=1}^{n}(k-1)a^{n-k} = f\,\frac{a^n - na + (n-1)}{(1-a)^2}\ . \qquad (3.2.5d)$$

e) $b_k = uka^k$, то $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a^{n-k} = ua^n \sum_{k=1}^{n} k = ua^n \cdot \frac{n+1}{2} n.$ (3.2.5e)

f) $b_n = unc^{n-1}$, то $\displaystyle x_n = x_0 a^n + u\,\frac{a^{n+1} - (n+1)ac^n + nc^{n+1}}{(a-c)^2}\ .$ (3.1.5f)

3.2.2. Популярная экономическая модель предполагает, что валовой внутренний продукт — ВВП — страны (Y) в каждом периоде есть сумма инвестиций (I), потребления (C), госрасходов (G) и чистого экспорта (NX) :

$$Y_n = I_n + C_n + G_n + NX_n, \qquad (3.2.8)$$

а потребление есть функция от ВВП прошлого периода: $C_n = mY_{n-1} + a$. Коэффициент m называется предельной склонностью к потреблению, a – величиной автономного потребления.

Спрогнозируем величину ВВП Наталенда через 5 лет, предполагая, что в начальный момент времени ВВП Наталенда равен 1200, предельная склонность к потреблению 0,8, величина автономного потребления 250. В 1-й год величина инвестиций равна 50, госрасходов 20, чистого экспорта 10 денежных единиц. Ожидается, что ежегодно госрасходы будут возрастать на 5%, а чистый экспорт убывать на 2 единицы.

Подставив данные задачи в уравнение (3.2.8)

$$Y_n = 50 + 0{,}8Y_{n-1} + 250 + 20(1{,}05)^{n-1} + 10 - 2(n-1)$$

и приведя подобные члены, получим разностное уравнение

$$Y_n = 0{,}8Y_{n-1} + 310 + 20(1{,}05)^{n-1} - 2(n-1) \qquad (3.2.9)$$

с начальным условием $Y_0 = 1200$.

Согласно формуле (3.2.5), решение уравнения (3.2.9) имеет вид,

$$Y_n = 1200(0{,}8)^n + 310\,\frac{1-(0{,}8)^n}{1-0{,}8} + 20\,\frac{(1{,}05)^n - (0{,}8)^n}{1{,}05-0{,}8} - 2\,\frac{(0{,}8)^n - 0{,}8n + (n-1)}{(1-0{,}8)^2}\,.$$

1-ое слагаемое в правой части определяется начальным условием, 2-ое — формулой (3.2.5a), 3-ее — формулой (3.2.5b), 4-ое — формулой (3.2.5d).

Проведя соответствующие алгебраические преобразования, получим, что изменение ВВП Наталенда описывается функцией

$$Y_n = -480(0{,}8)^n + 80(1{,}05)^n + 1600 - 10n. \qquad (3.2.10)$$

В частности, при $n = 5$ ВВП Наталенда равен

$$Y_5 = -480(0{,}8)^5 + 80(1{,}05)^5 + 1600 - 50 = 1495.$$

3.2.3. *Получив большое наследство, Джон Рассудительный решил вложить $120000 на счет под 12% интереса и использовать эти деньги на текущие расходы. В конце 1-го месяца он снял $1000, через месяц $1005, и так далее, снимая в каждый последующий месяц на 0,5% больше. При этом, он каждый раз с удовлетворением отмечал, что количество денег на счете увеличивается.*

Так, после 1-го изъятия на счете осталось

$$x_1 = (1 + 0{,}01)\cdot 120000 - 1000 = 120200,$$

после 2-го раза

$$x_2 = (1 + 0{,}01)\cdot 120200 - 1000(1 + 0{,}005) = 120397,$$

после 3-го

$$x_3 = (1 + 0{,}01)\cdot 120397 - 1000(1 + 0{,}005)^2 = 120591.$$

Через 2,5 года имел на счете $124456, а через 40 месяцев его душу согрела сумма $125043.

Через 5 лет, проверив в очередной раз счет, он с удивлением обнаружил, что денег на счете стало меньше – только $124434. Крайне возмущенный этим событием, Джон устроил скандал в банке, обвинив банковских служащих в нечестности. Понадобилось много времени, нервов и усилий, для того чтобы убедить Джона в том, что никто кроме него самого не снимал денег со счета. Некоторым утешением для Джона явился тот факт, что он понял, что при его режиме трат, денег на счете хватит еще на десять с лишним лет.

Количество денег на счете Джона описывается уравнением

$$x_n = (1 + 0{,}01)x_{n-1} - 1000(1 + 0{,}005)^{n-1}. \qquad (3.2.11)$$

Используя начальное значение $x_0 = 120000$ и последовательно подставляя значения, конечно же можно найти все интересующие значения x_n. Но перспектива, десятки раз повторить процесс не радует. К счастью, уравнение (3.2.11) является частным случаем уравнения (3.2.1), а его решение находится по формулам (3.2.4 и 3.2.5b).

Поэтому,

$$x_n = 120000(1+0{,}01)^n - 1000\frac{(1+0{,}01)^n - (1+0{,}005)^n}{0{,}005} =$$
$$= 120000(1+0{,}01)^n - 200000(1+0{,}01)^n + 200000(1+0{,}005)^n =$$
$$= -80000(1+0{,}01)^n + 200000(1+0{,}005)^n.$$

$$x_{30} = -80000(1+0{,}01)^{30} + 200000(1+0{,}005)^{30} = \$124456;$$

$$x_{40} = -80000(1+0{,}01)^{40} + 200000(1+0{,}005)^{40} = \$125043;$$

$$x_{60} = -80000(1+0{,}01)^{60} + 200000(1+0{,}005)^{60} = \$124434.$$

Для того чтобы доказать Джону, что у него нет повода для негодования, конечно можно вслед за ним и банковскими служащими провести пошаговые вычисления, но есть путь покороче.

Рассмотрим x_n, как функцию от числа n и найдем его максимум. Для этого, продифференцируем

$$(x_n)' = -80000(1+0{,}01)^n \cdot \ln 1{,}01 + 200000(1+0{,}005)^n \cdot \ln 1{,}005 ,$$

и приравняем производную к нулю.

Далее, приведя подобные члены и перегруппировав, получим уравнение

$$\left(\frac{1{,}01}{1{,}005}\right)^n = 2{,}5\frac{\ln 1{,}005}{\ln 1{,}01} .$$

Прологарифмировав это уравнение, и воспользовавшись соответствующим калькулятором или таблицей логарифмов, получим, что $n = 45{,}568$.

Итак, если бы Джон, каждый раз, после снятия денег со счета, интересовался величиной остатка, то он 45 ли 46 раз видел бы, что это число каждый раз увеличивается. Но после этого, к своему разочарованию, он бы заметил, что остаток начал уменьшаться.

Утешая Джона, опять же логарифмируя, можем решить уравнение

$$x_N = -80000(1+0,01)^N + 200000(1+0,005)^N = 0 .$$

Его решение, $N = 184,63$, показывает, что при указанных условиях Джон может снимать деньги со счета в конце каждого из 184 месяцев.

3.2.4. *Жаркынай имела на счете $1000 в начале 2001 года. В конце 2001-го года она положила на счет $100, в конце 2002 года сняла $200 и так далее, вкладывая в конце каждого нечетного года $100 и в конце каждого четного года снимая $200. Сколько денег будет на ее счете в начале 2015 года? Ставка интереса 10%.*

Для того чтобы решить эту задачу можно представить себе 2 счета: A и B.

На счете A имеется $1000 и в конце каждого последующего периода длиной 2 года с него 7 раз снимают $200.

На счете B в начале денег нет, в конце 2001 года на него вкладывают $100 и в конце каждого последующего периода длиной 2 года на него еще 6 раз вкладывают $100. При этом, к моменту подсчета денег с момента последнего вклада на счет B проходит 1 год.

Тогда, если x_n – это количество денег на счете A в конце периода с номером n, а y_n – количество денег на счете A в конце периода с номером n, то имеют место уравнения

$$x_n = (1 + 0,10)^2 x_{n-1} - 200 \qquad \text{и} \qquad y_n = (1 + 0,10)^2 y_{n-1} + 100$$

с начальными условиями $x_o = 1000$ и $y_0 = 0.$

Из (3.2.5a) следует, что решение 1-го уравнения есть функция

$$x_n = (1+0,21)^n \cdot 1000 - 200\frac{1-(1,21)^n}{1-1,21},$$

а 2-го $$y_n = (1+0,21)^n \cdot 0 + 100\frac{1-(1,21)^n}{1-1,21}.$$

Следовательно, в начале 2015 года на счете у Жаркынай будет

$$x_7 + y_n(1 + 0,10) = 1133 + 1465 = \$2598.$$

Другое, более изящное решение этой задачи можно получить, записав условия задачи на математическом языке через разностное уравнение

$$z_n = (1 + 0,10)z_{n-1} - 50 + 150(-1)^{n-1}$$

и начальное условие $z_o = 1000$.

По (3.2.5b), решение уравнения запишется в виде

$$z_n = (1+0,10)^n \cdot 1000 - 50\frac{1-(1,1)^n}{1-1,1} + 150\frac{(-1)^n - (1,1)^n}{(-1)-1,1}.$$

Поэтому, в начале 2015 года на счете будет $z_{14} = \$2598$.

Предложенный метод решения можно обобщить:

В нулевом периоде на счете z_o *денег. В конце 1-го года на счет кладут \$A, в конце 2 года \$B и так далее, вкладывая \$A в конце каждого нечетного года и \$B в конце каждого четного года. Сколько денег будет на счете после вклада с номером N? Ставка интереса* r.

Решение получается если условия задачи записать через разностное уравнение $z_n = (1 + r)z_{n-1} + (A + B)/2 + (-1)^{n-1}(A - B)/2$.

Асель и Акылай решили накопить 17000 сомов за 5 лет и положили на счет 5000 сомов. В конце 1-го квартала Асель внесла 1000 сомов, а в конце 2-го квартала Акылай сняла 1100 сомов. В конце 3-го квартала Асель внесла 1210 сомов, а в конце 4-го квартала Акылай сняла 1331 сомов, и так далее. Будет ли накоплена требуемая сумма, если ставка интереса 20%?

Переведя задачу на математический язык, получим, что требуется проанализировать решение уравнения

$$x_n = (1 + 0,05)x_{n-1} + 1000(-1,1)^{n-1}$$

с начальным условием $x_0 = 5000$.

Решение имеет вид

$$x_n = (1+0,05)^n \cdot 5000 + 1000\frac{(1,05)^n - (-1,1)^n}{1,05+1,1}.$$

Вычислим $x_{20} = 11371,5$ и увидим, что сумма меньше требуемой. Но стоит, обратить внимание на то, что *20* четное число, а в конце каждого четного квартала деньги со счета снимались. Поэтому, подсчитаем деньги после последнего вклада:

$x_{19} = 16654{,}68$. Опять мало, но ситуацию спасает то, что эти деньги должны пролежать на счете один квартал на них начислится интерес:

$16654{,}68(1 + 0{,}05) = 17487{,}4$.

Задачи, рассмотренные в данном пункте, помимо теоретического интереса, могут быть весьма полезны и при моделировании практических ситуаций — например, при описании бизнес-процессов, в которых имеют место сезонные колебания.

3.2.5. Уровень безработицы

В стране «Альфа» размер рабочей силы неизменен и равен 2,5 млн. человек, число безработных в начальный момент времени 120 000. Пусть, ежемесячно 1% занятых теряют работу, а 19% безработных находят работу. Сколько безработных будет в этой стране через 9 месяцев? Сколько безработных будет в этой стране через много месяцев, если указанные условия не будут меняться?

Сформулируем и решим задачу в общем виде. Пусть L означает величину рабочей силы. Она предполагается неизменной. Тогда, если E_n — число работающих , а U_n — число безработных на конец периода времени с номером n, имеет место равенство $L = E_n + U_n$.

Отметим, что число U_n /L называется уровнем безработицы.

Пусть s — показатель уровня увольнения работающих, то есть доля занятых, которые теряют работу в рассматриваемом периоде, f — показатель уровня трудоустройства, то есть доля безработных, которые находят работу в рассматриваемом периоде. Предположим, что оба этих показателя постоянны, и убедимся, что они определяют уровень безработицы.

Тогда, приняв во внимание тот факт, что $E_n = L - U_n$, получим уравнение

$$U_n = U_{n-1}(1 - f) + s(L - U_{n-1}). \qquad (3.2.12)$$

Переписав его в виде

$$U_n = U_{n-1}(1 - f - s) + sL , \qquad (3.2.13)$$

получим линейное разностное уравнение 1-го порядка.

Его решение можно записать в виде:

$$U_n = U_0(1-f-s)^n + sL\frac{1-(1-f-s)^n}{1-(1-f-s)} \quad . \qquad (3.2.14)$$

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, из (3.2.14) можно (при $n \to \infty$) получить, что $U = \dfrac{sL}{f+s}$.

Отсюда получается формула, приведенная в главе 5 известной книги Н. Грегори Мэнкью «Макроэкономика» [118]:

уровень безработицы $\dfrac{U}{L} = \dfrac{s}{f+s}$. (3.2.15)

Отметим, что в книге [118] формула (3.2.15) получена в предположении о наличии равновесия на рынке труда. Динамика изменения безработицы в [118] не рассматривалась.

Вернемся, к числовому примеру, к стране «Альфа».

Из условий: *L = 2500000; U_0 = 120 000; s = 0,01; f = 0,19.*

Тогда, из формулы (3.2.14) получим оценку числа безработных в этой стране через 9 месяцев: $U_9 = 120000(1-0{,}19-0{,}01)^9 + 0{,}01 \cdot 2500000\dfrac{1-(1-0{,}19-0{,}01)^9}{1-(1-0{,}19-0{,}01)} =$

=16106 + 108223 = 124329.

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, получаем, что на рынке труда наступит равновесие, если число безработных в этой стране будет равно $U = 0{,}01 \cdot 2500000\dfrac{1}{0{,}19+0{,}01} = 12500$, или другими словами уровень безработицы стабилизируется на уровне 12500/2500000 = 0,05 = 5%.

Это число можно получить непосредственно из условий задачи, подставив значения *s = 0,01* и *f = 0,19* в формулу (3.2.15): $\dfrac{0{,}01}{0{,}19+0{,}01} = 0{,}05$.

В стране «Бетта» размер рабочей силы в начальный момент времени равен 2,5 млн. человек и ежемесячно растет на 0,5%; число безработных в начальный *момент времени 120 000. Пусть, ежемесячно 1% занятых теряют работу, а 19% безработных находят работу. Сколько безработных будет в этой стране через 9 месяцев? Сколько безработных будет в этой стране через много месяцев, если указанные условия не будут меняться?*

Предварительно решим и эту задачу в общем виде.

Пусть L_n означает величину рабочей силы. Тогда, если она ежемесячно меняется на $g\%$, величина рабочей силы в момент времени n будет иметь вид $L_n = L_0(1 + g)^n$.

Тогда, имеет место равенство $L_n = E_n + U_n$. Приняв во внимание тот факт, что $E_n = L_n - U_n$, получим уравнение

$$U_n = U_{n-1}(1 - f) + s(L_{n-1} - U_{n-1}). \qquad (3.2.16)$$

Переписав его в виде

$$U_n = U_{n-1}(1 - f - s) + s\,L_0(1 + g)^{n-1},$$

получим линейное разностное уравнение 1-го порядка вида (3.2.1).

Его решение есть функция

$$U_n = U_0(1 - f - s)^n + sL_0\frac{(1+g)^n - (1 - f - s)^n}{g + f + s}\ . \qquad (3.2.17)$$

Разделив U_n на L_n, получим уровень безработицы в период времени n. Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, разделив (3.2.17) на L_n при $n \to \infty$ получаем, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{U}{L} = \frac{s}{g + f + s}. \qquad (3.2.18)$$

Формула (3.2.18) является новым, более расширенным вариантом формулы (3.2.15).

Числовой пример для страны «Бетта»:

Из условий: $L_0 = 2500000; U_0 = 120\,000; s = 0{,}01; f = 0{,}19; g = 0{,}005$.

Тогда, из формулы (3.2.18) получим оценку числа безработных в этой стране через 9 месяцев:

$$U_9 = 120000(1-0{,}19-0{,}01)^9 + 0{,}01 \cdot 2500000 \frac{(1+0{,}005)^9 - (1-0{,}19-0{,}01)^9}{(1+0{,}005)-(1-0{,}19-0{,}01)} =$$

16106 + 111182 = 127288.

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, получим, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{0{,}01}{0{,}005+0{,}19+0{,}01} = 0{,}04878$$

3.2.6. Динамические модели спроса и предложения

Задача определения точки рыночного равновесия является довольно простой задачей, которая решается во вводных курсах экономической теории. – *Берем уравнения спроса и предложения, приравниваем и получаем ответ*. –

Но при этом возникает следующий вопрос: «А как обстоит дело на реальных рынках?» Ведь на реальном рынке нет некого рыночного божества, которое бы решало вышеупомянутую задачу, предварительно составив (что является весьма непростой эконометрической задачей) необходимые уравнения. Для того чтобы ответить на подобные вопросы, придуманы различные экономические модели, о некоторых из них мы будем говорить далее.

Модель Эванса Рыночная цена товара была равна p_0. После того как под воздействием внешних обстоятельств спрос и предложение на этом рынке стали описываться уравнениями $q^d = a - bp^d$ и $q^s = e + fp^s$ (коэффициенты a, b, e, неотрицательны), господин Маршалл заявил, что он знает, что новая равновесная цена будет равна $\frac{a-e}{b+f}$. В ответ, господин Эванс сказал: «А я знаю, каким образом рынок приходит к этой цене».

Далее мы приводим рассуждения господина Эванса.

Изменение рыночных условий приводит к изменению равновесной цены. Причем изменение цены прямо пропорционально разнице между объемом текущего спроса и текущего предложения. На математическом языке, это выражается следующим разностным уравнением: $p_n = p_{n-1} + k(q^d_{n-1} - q^s_{n-1})$, где k это коэффициент пропорциональности определяемый неценовыми факторами.

Подставив значения q^d и q^s , получим линейное разностное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$p_n = p_{n-1} + k[(a - bp_{n-1}) - (e + fp_{n-1})] . \qquad (3.2.19)$$

Отсюда, собрав подобные члены, получим

$$p_n = p_{n-1}(1 - kb - kf) + k(a - e) .$$

Решение уравнения (3.2.19) есть функция

$$p_n = (1 - kb - kf)^n p_0 + k(a-e)\frac{1-(1-kb-kf)^n}{kb+kf} . \qquad (3.2.20)$$

В частности, из формулы (3.2.20) следует, что если число $1 - kb - kf$ по абсолютной величине меньше единицы, $k \neq 0$, то при $n \to \infty$ цена будет стремиться к числу указанному господином Маршаллом: $\dfrac{a-e}{b+f}$.

Пример 1

Пусть функция спроса задана уравнением $q^d = 10 - p^d$ *,*
функция предложения уравнением $q^s = 1 + 2p^s$ *, а цена в начальный момент времени равна 2.*

Тогда изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, будет описываться последовательностью

$$p_n = (1 - k \cdot 3)^n 2 + k \cdot 9 \cdot \frac{1-(1-k\cdot 3)^n}{k \cdot 3} .$$

Если ситуация на рынке не будет меняться достаточно долго, а $0 < |1 - k \cdot 3| < 1$, то цена будет стремится к 3.

При этом,

если $0 < k < 1/3$, то цена будет последовательно повышаться от 2 к 3;

если $1/3 < k < 2/3$, цена будет приближаться к 3, попеременно, сверху и снизу.

Пример 2

Пусть на рынке функция спроса имеет вид $q_n = 90(0,96)^n - 1,2\,p_n$*; функция предложения* $q_n = 0,8p_n - 2(0,96)^n$ *; цена в начальный момент времени равна 42, в 1-м периоде 48.*

Тогда изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, будет описываться уравнением $p_n = p_{n-1} + k[(90\cdot 0{,}96^{n-1} - 1{,}2\,p_{n-1}) - (0{,}8p_{n-1} - 2\cdot 0{,}96^{n-1})]$

$=> \quad p_n = p_{n-1}(1 - 2k) + 92k\cdot 0{,}96^{n-1}$.

Подставив значения цены в начальный и 1-й период времени, получим $48 = 42(1 - 2k) + 92k \quad => \quad k = 0{,}75$.

Следовательно, цена товара на этом рынке, в любой период времени описывается уравнением $\quad p_n = 0{,}5p_{n-1} + 69\cdot 0{,}96^{n-1}$,
и может быть найдена по формуле

$$p_n = 42(0{,}5)^n + 69\,\frac{(0{,}5)^n - (0{,}96)^n}{0{,}5 - 0{,}96} = 150(0{,}96)^n - 108(0{,}5)^n.$$

Полученный результат вполне согласуется с экономическим смыслом: если спрос будет все время уменьшаться, а предложение возрастать, то равновесная цена будет уменьшаться.

Паутинообразная модель Модель Эванса включает в себя коэффициент пропорциональности ***k***, который иногда трудно объяснить. Эта проблема отсутствует при использовании паутинообразной модели (правда появляются новые проблемы), которая мы проиллюстрируем следующей ситуацией.

Капитан, который возит товары на продажу на остров ЭкТ, узнав от купцов, бывших до него на острове, что они продали каждый ящик с шоколадом за 10 мер серебра, взял с собой 10 ящиков. На острове выяснилось, что он может продать весь шоколад по цене 14 мер серебра за ящик. Вдохновленный этой, ценой он на следующий раз привез 14,8 ящиков шоколада. Но, к сожалению, он сумел продать эту партию шоколада только по цене 11,6 мер серебра за ящик. Поэтому, в 3-й раз капитан взял с собой только 11,92 ящика шоколада. …

Считая, что предложение шоколада со стороны капитана и спрос на шоколад со стороны островитян линейны, выпишем соответствующие функции. Далее, предполагая, что на этот остров не будут ездить другие торговцы шоколадом, а спрос и предложение останутся неизменными, определим на какой цене, и при каком объеме стабилизируется рынок. Из условий следует, что объем предложения шоколада в каждой поездке определяется ценой, по которой шоколад был продан в предыдущую поездку. Отсюда, функция предложения

$q_n^s = e + f\,p_{n-1}$.

Подставив значения, получим систему уравнений, которая позволит определить коэффициенты функции предложения: $\begin{cases} 10 = e + f\cdot 10, \\ 14{,}8 = e + f\cdot 14 \end{cases}$. Решив эту систему, получим, что предложение шоколада со стороны капитана задается функцией $q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2$. Справедливость этого утверждения можно проверить данными 3-й поездки: $11{,}92 = 1{,}2(11{,}6) - 2$.

Коэффициенты функции спроса на шоколад со стороны островитян $q_n^d = a + b\,p_n$ определяются системой уравнений $\begin{cases} 10 = a + b\cdot 14, \\ 14{,}8 = a + b\cdot 11{,}6 \end{cases}$.

Решение системы: $a = 38$; $b = -2$.

Следовательно, цена, по которой продается шоколад в каждый приезд капитана, а также количество товара, который он каждый раз берет на остров, задаются системой уравнений $\begin{cases} q_n^d = 38 - 2p_n, \\ q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2 \end{cases}$ и начальным условием $p_o = 10$.

Так как капитан каждый раз продает весь товар, при каждой поездке объем спроса равен объему предложения. Поэтому, имеет место равенство

$38 - 2p_n = 1{,}2p_{n-1} - 2$. Отсюда, $p_n = -0{,}6p_{n-1} + 20$. Решение этого уравнения,

$$p_n = (-0{,}6)^n p_0 + 20\frac{1-(-0{,}6)^n}{1-(-0{,}6)} = (-0{,}6)^n\cdot 10 + 20\frac{1-(-0{,}6)^n}{1+0{,}6}.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что цена стабилизируется на уровне 12,5, и при этом будет продаваться 13 ящиков шоколада.

Для того чтобы понять, откуда пошло название модели, нарисуем линии спроса и предложения и соединим соответствующие точки (рисунок 3.2.1):

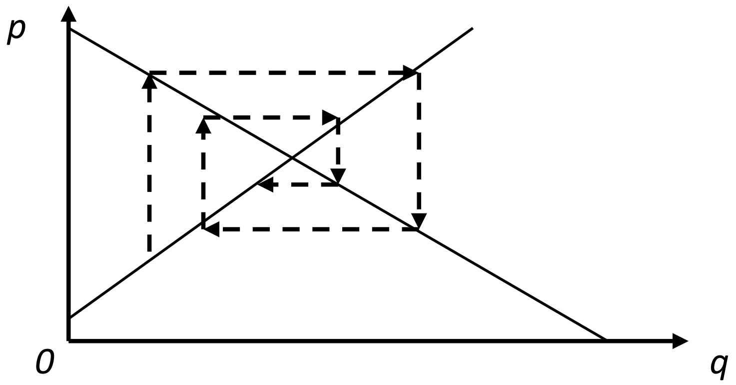


Рисунок 3.2.1. *Паутинообразная модель. Сходящийся случай.*

Итак, предполагается, что исходя из цены предыдущего периода, предлагается некоторое количество товара, весь этот товар продается по цене, которая определяется уравнением спроса, и которая определяет объем продаж следующего периода.

Стоит отметить, что согласно паутинообразной модели рынок не всегда приходит в равновесное состояние. В качестве примера предположим, что спрос и предложение шоколада задаются уравнениями $q_n^d = 38 - 2p_n$ и $q_n^s = 3p_{n-1} - 2$. Тогда соответствующее разностное уравнение будет иметь вид $p_n = -1{,}5p_{n-1} + 20$.

Его решение $p_n = (-1{,}5)^n p_0 + 20\dfrac{1-(-1{,}5)^n}{1-(-1{,}5)} = (-1{,}5)^n \cdot 10 + 20\dfrac{1-(-1{,}5)^n}{1+1{,}5}$.

Так как последовательность $(-1{,}5)^n$ не имеет предела, мы получаем, что цена на таком рынке никогда не стабилизируется.

Соответствующий график имеет вид раскручивающейся спирали (рисунок 3.2.2):

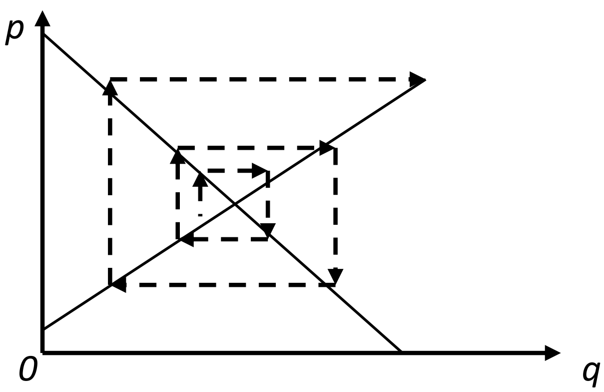


Рисунок 3.2.2. *Паутинообразная модель. Расходящийся случай.*

Для того чтобы определить условия, при которых цена на рынке в условиях паутинообразной модели стабилизируется, напишем уравнения спроса и предложения в общем виде: $q_n^d = a - bp_n$, $q_n^s = e + f\,p_{n-1}$;

а затем, приравняв правые части уравнений, получим разностное уравнение

$p_n = \dfrac{f}{-b}\,p_{n-1} + \dfrac{e-a}{(-b)}$ и решим его:

$$p_n = \left(-\frac{f}{b}\right)^n p_0 + \frac{e-a}{(-b)} \cdot \frac{1-(-f/b)^n}{1-(-f/b)} = \left(-\frac{f}{b}\right)^n \left(p_0 + \frac{a-e}{b+f}\right) + \frac{a-e}{b+f} \ .$$

Последовательность цен сходится, то есть стабилизируется на числе $\dfrac{a-e}{b+f}$ только тогда, когда абсолютное значение числа f/b меньше чем 1.

Другими словами, согласно паутинообразной модели, рынок приходит в равновесное состояние только в том случае, когда «наклон» функции спроса будет по абсолютной величине больше, чем «наклон» функции предложения. Эта ситуация иллюстрируется рисунком 1.

Если же отношение f/b больше 1, то имеет место ситуация иллюстрируемая рисунком 3.2.2. В этом случае рынок не приходит к равновесию, и в длительный период времени такой рынок существовать не может – уравнения спроса и предложения должны поменяться.

То же самое должно произойти, если наклон функции спроса будет по абсолютной величине равен наклону функции предложения (рисунок 3.2.3), то есть $f/b = 1$, цена будет попеременно принимать два значения

$$\frac{a-e}{b+f} - \left(p_0 + \frac{a-e}{b+f}\right) \quad \text{и} \quad \frac{a-e}{b+f} + \left(p_0 + \frac{a-e}{b+f}\right).$$

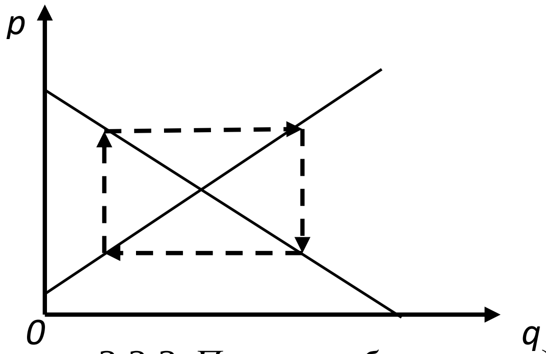


Рисунок 3.2.3. *Паутинообразная модель. Зацикливание.*

§3.3. Паутинообразная модель, описывающая поиск рыночного равновесия

3.3.1. ТЕОРЕМА 1

Решение уравнения второго порядка

$$y_{m+2} + py_{m+1} + qy_m = f(m), \qquad (3.3.1)$$

можно получить, решив цепочку разностных уравнений первого порядка

$$z_{m+1} - k_1 z_m = f(m), \qquad (3.3.1.a)$$

$$y_{m+1} - k_2 y_m = z_m . \qquad (3.3.1.b)$$

Здесь p и q постоянные коэффициенты, f - заданная функция, k_1 и k_2 - корни квадратного алгебраического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. [129]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Подставив значение z из (3.3.1.b) в (3.3.1.a) получим

$$y_{m+2} - k_2 y_{m+1} - k_1(y_{m+1} - k_2 y_m) = f(m).$$

Далее, перегруппировав слагаемые

$$y_{m+2} - (k_1 + k_2)y_{m+1} + k_1 k_2 y_m = f(m),$$

и воспользовавшись теоремой Виета, убедимся в том, что уравнение (3.3.1) равносильно цепочке разностных уравнений (3.3.1.a) – (3.3.1.b).

Теорема 1 позволяет свести процесс решения уравнения (3.3.1) к решению линейных разностных уравнений 1-го порядка вида

$$x_{n+1} - ax_n = b_n, \qquad (3.3.2)$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-тый период.

Резюмируя изложенное в предыдущих параграфах, можно видеть, что если $b_n = g + hc^n$ решение уравнения (3.3.2) определяется формулой

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a - 1} + h\frac{a^n - c^n}{a - c}, \qquad (3.3.3)$$

Формула (3.3.2) не имеет места в случаях, когда $a = 1$ или $a = c$.

При $a = 1$ имеет место формула

$$x_n = x_0 a^n + ng + h\frac{1 - c^n}{1 - c}, \qquad (3.3.3.a)$$

а при $a = c$ формула

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a - 1} + nha^{n-1}, \qquad (3.3.3.b)$$

Для того чтобы проиллюстрировать теорему 1, можно использовать паутинообразную модель

В предыдущем параграфе предполагалось, что цена предыдущего периода определяет количество товара, которое будет предлагаться в текущем периоде. Развивая эту мысль, можно предполагать, что объем предложения текущего периода, определяется некоторой линейной комбинацией цен ***n*** предыдущих периодов. Это предположение приводит к уравнению порядка ***n***.

3.3.2. Далее мы рассмотрим несколько примеров, в которых изменение рыночной цены согласно паутинообразной модели определяется решением линейного разностного уравнения 2-го порядка.

Пример 1

Пусть функция спроса задается уравнением $q = 12 - 0{,}4p$, функция предложения уравнением $q = 1{,}22p - 0{,}96$, цена в начальный момент времени равна 8,8, в 1-м периоде 7,9. Определить функцию, описывающую изменение рыночной цены, используя паутинообразную модель, в которой объем предложения в периоде с номером ***n*** *определяется линейной комбинацией цен предыдущих периодов $(41p_{n-1} + 20p_{n-2})/61$.*

Согласно модели, на рынке в каждом периоде продается весь товар, предложенный к продаже. То есть имеет место уравнение

$$12 - 0{,}4p_n = 1{,}22[(41p_{n-1} + 20p_{n-2})/61] - 0{,}96.$$

Перегруппируем слагаемые, и запишем уравнение в стандартном виде

$$p_{n+2} + 2{,}05p_{n+1} + p_n = 32{,4}. \qquad (3.3.4)$$

Так как характеристическое уравнение $k^2 + 2{,}05k + 1 = 0$ имеет корни $-1{,}25$ и $-0{,}8$, по теореме 1 уравнение (3.3.4) можно переписать в виде цепочки

$$z_{n+1} + 0{,}8z_n = 32{,}4, \qquad (3.3.4.a)$$

$$p_{n+1} + 1{,}25p_n = z_n\,. \qquad (3.3.4.b)$$

Согласно формуле (3.3.3) решение уравнения (3.3.4.a) есть функция

$$z_n = z_0(-0{,}8)^n + 32{,}4\frac{(-0{,}8)^n - 1}{-0{,}8 - 1}\,. \qquad (3.3.5)$$

Воспользуемся уравнением (3.3.4.b) для определения z_0:

$$z_0 = \quad p_1 + 1{,}25p_0 = 8{,}8 + 1{,}25 \cdot 7{,}9 = 18{,}9,$$

и перепишем функцию (3.3.5) в виде $z_n = 18 + 0{,}9(-0{,}8)^n$.

Подставим найденное значение в уравнение (3.3.4.b) и еще раз использовав формулу (3.3.3), получим решение

$$p_n = 8{,}8(-1{,}25)^n + 0{,}9\frac{(-0{,}8)^n - (-1{,}25)^n}{-0{,}8 - (-1{,}25)} + 18\frac{1-(-1{,}25)^n}{1-(-1{,}25)} \ .$$

Для того чтобы закончить решение осталось привести подобные члены и записать ответ $p_n = 8 + 2(-0{,}8)^n - 1{,}2(-1{,}25)^n$.

Несложно понять, что при больших значениях n изменение цены будет соответствовать рисунку 3.2.2 предыдущего параграфа. [129]

В то же время, подбирая начальные условия ($p_1 = 14 - 0{,}8p_0$) можно в решении уравнения (3.3.4) избавиться от слагаемого с множителем $(-1{,}25)^n$, и получить ситуацию, соответствующую рисунку 3.2.1 предыдущего параграфа.

В частности, если предположить что цена в начальный момент времени равна 10, в 1-м периоде 6,4, то повторив выкладки, получим $p_n = 8 + 2(-0{,}8)^n$.

3.3.3. Пример 2

Пусть функция спроса задается уравнением $q = 33 - p$, функция предложения уравнением $q = 2{,}24p + 0{,}6$, цена в начальный момент времени равна 8,5, в 1-м периоде 11. Определить функцию, описывающую изменение рыночной цены, использовав паутинообразную модель, в которой объем предложения в периоде с номером ***n*** *определяется линейной комбинацией цен предыдущих периодов $(5p_{n-1} + 2p_{n-2}) / 7$.*

Так же, как и в примере 1, приравняем объемы:

$$33 - p_n = 2{,}24[(5p_{n-1} + 2p_{n-2}) / 7] + 0{,}6,$$

и получим уравнение

$$p_{n+2} + 1{,}6p_{n+1} + 0{,}64p_n = 32{,}4. \qquad (3.3.6)$$

Характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня: $-0{,}8$ и $-0{,}8$. Следовательно, уравнение (3.3.6) можно переписать в виде цепочки

$$z_{n+1} + 0{,}8z_n = 32{,}4, \qquad (3.3.6.a)$$

$$p_{n+1} + 0{,}8p_n = z_n . \qquad (3.3.6.b)$$

Решение уравнения (3.3.6.a) получено в примере 1. Поэтому, из уравнения (3.3.6.b) определим z_0:

$$z_0 = p_1 + 0{,}8p_0 = 11 + 0{,}8\cdot 8{,}5 = 17{,}8,$$

и подставив найденное значение в (3.3.5), получим

$$z_n = 18 - 0{,}2(-0{,}8)^n.$$

Тогда уравнение (3.3.6.b) можно записать в виде

$$p_{n+1} + 0{,}8p_n = 18 - 0{,}2(-0{,}8)^n.$$

Решение полученного уравнения и, соответственно, примера 2, получим из формулы (3.3.3.b):

$$p_n = 8{,}5(-0{,}8)^n + 18\frac{1-(-0{,}8)^n}{1{,}8} - 0{,}2n(-0{,}8)^{n-1} = 10 + (0{,}25n - 1{,}5)(-0{,}8)^n.$$

При больших значениях n изменение цены будет иллюстрироваться рисунком 3.2.1 предыдущего параграфа.

3.3.4. В то же время, несложно проверить, что если объем предложения, как в предыдущем параграфе, определяется ценой предыдущего периода, то будет иметь место раскручивающаяся паутина.

Пример 3

Пусть функция спроса задается уравнением $q = 20 - 0{,}5p$ *, функция предложения уравнением* $q = 0{,}8p + 0{,}5$, *цена в начальный момент времени равна 13, в 1-м периоде 14,2. Определить функцию, описывающую изменение рыночной цены, используя паутинообразную модель, в которой объем предложения в периоде с номером* $\mathbf{n}$ *определяется линейной комбинацией цен предыдущих периодов* $(13p_{n-1} + 3p_{n-2})/16$.

Повторив вышеприведенные рассуждения, из равенства

$$20 - 0{,}5p_n = 0{,}8[(13p_{n-1} + 3p_{n-2})/16] + 0{,}5$$

получим уравнение

$$p_{n+2} + 1{,}3p_{n+1} + 0{,}3p_n = 39. \qquad (3.3.7)$$

Воспользовавшись корнями характеристического уравнения (-1) и $(-0{,}3)$, уравнение (3.3.7) можно переписать в виде цепочки

$$z_{n+1} + 0{,}3z_n = 39, \qquad p_{n+1} + p_n = z_n.$$

Повторив рассуждения, использованные при решении примера 1, получим, что $z_n = 30 - 2{,}8(-0{,}3)^n$ и $p_n = 15 - 4(-0{,}3)^n + 2(-1)^n$.

Особенность данного примера в том, что при больших значениях n изменение цены будет соответствовать рисунку 3.2.3 предыдущего параграфа.

3.3.5. Пример 4

Пусть функция спроса задается уравнением $q = 103 - 0{,}75p$, *функция предложения уравнением* $q = p - 2$, *цена в начальный момент времени равна 50, в 1-м периоде 51. Определить функцию, описывающую изменение рыночной цены, использовав паутинообразную модель, в которой объем предложения в периоде с номером* $\boldsymbol{n}$ *определяется линейной комбинацией цен предыдущих периодов* $(3p_{n-1} + p_{n-2})/4$.

Характеристическое уравнение уравнения 2-го порядка

$$p_{n+2} + p_{n+1} + p_n/3 = 140 \quad , \qquad (3.3.8)$$

к решению которого сводится исходная задача, имеет комплексные корни

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6} .$$

Из цепочки уравнений

$$z_{n+1} - k_2 z_n = 140, \qquad (3.3.8.a)$$

$$p_{n+1} - k_1 p_n = z_n . \qquad (3.3.8.b)$$

получим, что $z_0 = 51 - 50\,k_1$

и $z_n = (51 - 50k_1)(k_2)^n + 140\dfrac{(k_2)^n - 1}{k_2 - 1} = 90 - 10i\sqrt{3} - \left(14 - i\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)(k_2)^n.$

Подставив значение функции z_n в правую часть уравнения (3.3.8.b) из формулы (3.3.3) получим

$$p_n = (k_1)^n 50 + (90 - 10i\sqrt{3})\frac{1-(k_1)^n}{1-k_1} - \left(14 - i\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\frac{(k_2)^n - (k_1)^n}{k_2 - k_1} . \qquad (3.3.9)$$

Для того чтобы упростить выражение воспользуемся тригонометрической формой записи комплексного числа:

$$k_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\cos\pi/6 - \sin\pi/6\,)$$

и $k_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(cos\pi/6 - sin\pi/6)$,

и формулой Муавра:

$$(k_2)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (cos\pi/6 + sin\pi/6)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (\cos\pi n/6 + \sin\pi n/6),$$

$$(k_1)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (\cos\pi/6 - \sin\pi/6)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (\cos\pi n/6 - \sin\pi n/6).$$

Теперь, заменив в выражении (3.3.9) значения k_1 и k_2, и их степени, на тригонометрические представления, и собрав подобные члены, получим

$$p_n = 60 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^n \left(10cos\frac{n\pi}{6} - 28\sqrt{3}sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

Подведем итоги. Паутинообразная модель позволяет проследить изменение цен, исходя из предположения, что объем предложения определяется ценами предыдущих периодов. При этом, количество задействованных предыдущих периодов определяет порядок разностного уравнения, решение которого есть функция изменения цены. В данном параграфе рассматривались только уравнения 2-го порядка. Но предполагая, что объем предложения определяется большим числом предыдущих периодов, несложно строить модели, описываемые разностными уравнениями более высоких порядков.

§3.4. Модель Самуэльсона - Хикса

В этом параграфе мы покажем, как системы линейных разностных уравнений решаются путем сведения к решению линейных разностных уравнений высоких порядков. Этот метод применяется к анализу модели Акселератора-Мультипликатора или, как его часто называют модели Самуэльсона. На конкретных примерах показано, что согласно модели, экономический рост имеет место в тех случаях, когда величина инвестиций превосходит прирост потребления.

3.4.1. Пусть Y_t обозначает национальный доход, C_t - общее потребление и I_t - общие инвестиции в стране во время t.

Предположим, что для $t = 0, 1, \ldots,$

$$Y_t = C_t + I_t \;, \qquad (3.4.1)$$

$$C_{t+1} = aY_t + b \;, \qquad (3.4.2)$$

$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t) \;, \qquad (3.4.3)$$

где a, b и c - постоянные.

Уравнение (3.4.1) показывает, что национальный доход разделен между потреблением и инвестициями.

Уравнение (3.4.2) является предположением, о том что потребление в периоде $t + 1$ является линейной функцией национального дохода в предыдущем периоде.

Это "мультипликативная" часть модели.

Наконец, уравнение (3.4.3) заявляет, что инвестиции в периоде $t + 1$ пропорциональны изменению в потреблении по отношении к предыдущему периоду.

Это "акселераторная" часть модели.

Объединенная модель "акселератора -мультипликатора" связана с именами лауреатов нобелевской премии по экономике П. Самуэльсона и Дж. Хикса.

Предположим, что объем потребления C_0 и объем инвестиции I_0 известны для начального периода $t = 0$.

Тогда из (3.4.1) следует, что $Y_0 = C_0 + I_0$,
а из (3.4.2) следует, что $C_1 = aY_0 + b$.

Из (3.4.3), мы получаем, что $I_1 = c(C_1 - C_0)$, и затем, снова воспользовавшись (3.4.1) имеем $Y_1 = C_1 + I_1$. Следовательно, если известны C_0 и I_0, то и Y_1, C_1 и I_1 известны.

Обращаясь снова к (3.4.2), мы находим C_2, затем (3.4.3) дает нам, величину I_2, (3.4.1) в свою очередь позволяет вычислить Y_2.

Очевидно, таким образом, мы можем получить выражения для C_t, Y_t и I_t для всех t в терминах C_0, Y_0 и постоянных a, b и c.

Однако следует отметить, что получаемые выражения все более и более усложняются.

Другой метод изучения системы обычно привносит большую ясность.

Он состоит в сведении системы к одному уравнению, зависящему от одной неизвестной функции. Здесь мы используем этот метод, для того чтобы прийти к разностному уравнению относительно Y_t.

С этой целью, воспользуемся тем, что уравнения (3.4.1) – (3.4.3) справедливы для всех $t = 0, 1 \ldots$, и заменим t на $t+1$ в (3.4.2) и (3.4.3) и t на $t+2$ в (3.4.1), для того чтобы получить

$$C_{t+2} = aY_{t+1} + b \qquad (3.4.4)$$

$$I_{t+2} = c(C_{t+2} - C_{t+1}) \qquad (3.4.5)$$

$$Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2} \qquad (3.4.6)$$

Подставляя (3.4.2) и (3.4.4) в (3.4.5) получаем, что $I_{t+2} = ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Подставив этот результат и (3.4.4) в (3.4.6), получим

$$Y_{t+2} = aY_{t+1} + b + ac(Y_{t+1} - Y_t).$$

Приведя подобные члены, приходим к уравнению

$$Y_{t+2} - a(1 + c)Y_{t+1} + acY_t = b \quad (t = 0, 1, \ldots) \qquad (3.4.7)$$

Это разностное уравнения второго порядка с Y_t в качестве неизвестной функции называют уравнением Хикса.

Далее будет говориться о том, как получить решение уравнения (3.4.7) при различных значениях коэффициентов a, b, c.

3.4.2. Пример 1

Предположим, что коэффициент a, выражающий предельную склонность к потреблению равен 0,9, а величина инвестиций в каждый момент времени превышает прирост потребления в два раза – то есть $c = 2$.

Также предположим, что величина автономного потребления b равна 10, величина Внутреннего Валового Продукта (ВВП) в исходный момент времени (Y_0) равна 100, в следующем периоде (Y_1) есть 100,9.

Тогда, согласно уравнению (3.4.7) изменение ВВП описывается уравнением

$$Y_{t+2} - 2{,}7Y_{t+1} + 1{,}8Y_t = 10 \quad (t = 0, 1, \ldots) \qquad (3.4.8)$$

при начальных условиях

$$Y_0 = 100, \; Y_1 = 100{,}9. \qquad (3.4.9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение $m^2 – m + 1 = 0$ имеет корни $m_1 = 1{,}5$ и $m_2 = 1{,}2$.

Следовательно, по теореме 1, уравнение (3.4.8) эквивалентно цепочке уравнений

$$z_{t+1} – 1{,}2 z_t = 10, \qquad (3.4.8.a)$$

$$Y_{t+1} – 1{,}5Y_t = z_t . \qquad (3.4.8.b)$$

При этом, из (3.4.8.b) и (3.4.9) следует, что $z_0 = 100{,}9 – 150 = -49{,}1$.

Тогда, решение уравнения (3.4.8.a), согласно формуле (3.4.3), выражается функцией

$$z_t = (1{,}2)^t(-49{,}1) + 10\,\frac{(1{,}2)^t-1}{0{,}2} = 0{,}9(1{,}2)^t - 50. \qquad (3.4.10)$$

Подставив (3.4.10) в уравнение (3.4.8.b) и еще раз воспользовавшись формулой (3.4.3) получим

$$Y_t = (1{,}5)^t(100) + 0{,}9\,\frac{(1{,}2)^t-(1{,}5)^t}{1{,}2-1{,}5} - 50\,\frac{(1{,}5)^t-1}{0{,}5} = 100 + 3(1{,}5)^t - 3(1{,}2)^t. \qquad (3.4.11)$$

Функция (3.4.11) является растущей. К примеру, $Y_2 = 102{,}43$, $Y_{10} = 254{,}42$.

И несложно понять, что определяющим моментом является значение коэффициента $c = 2$.

3.4.3. Такой же результат — растущую функцию ВВП — получим и в следующем примере. Он интересен тем, что имеет место кратность корней характеристического уравнения.

Пример 2

Предположим, что коэффициент a равен 0,96, а величина инвестиций в каждый момент времени превышает прирост потребления в полтора раза — то есть $c = 1{,}5$. Также предположим, что величина автономного потребления b равна 4, величина ВВП в исходный момент времени (Y_0) равна 100, в следующем периоде (Y_1) есть 101.

Тогда, согласно уравнению (3.4.3) изменение ВВП описывается уравнением

$$Y_{t+2} - 2{,}4Y_{t+1} + 1{,}44Y_t = 4 \quad (t = 0, l, \ldots) \qquad (3.4.12)$$

Так как характеристическое уравнение имеет корни $m_1 = m_2 = 1{,}2$, уравнение (3.4.12) эквивалентно цепочке уравнений

$$z_{t+1} - 1{,}2z_t = 4, \qquad (3.4.12.a)$$

$$Y_{t+1} - 1{,}2Y_t = z_t. \qquad (3.4.12.b)$$

с $z_0 = 101 - 120 = -19.$

Решение уравнения (3.4.12.a), есть функция

$$z_t = (1{,}2)^t(-19) + 4\frac{(1{,}2)^t - 1}{0{,}2} = (1{,}2)^t - 20. \qquad (3.4.13)$$

Подставив (3.4.13) в уравнение (3.4.12.b), получим

$$Y_{t+1} - 1{,}2Y_t = (1{,}2)^t - 20.$$

Теперь воспользуемся формулой (3.4.3):

$$Y_t = (1{,}2)^t(100) + t(1{,}2)^{t-1} - 20\frac{(1{,}2)^t - 1}{0{,}2} = 100 + + t(1{,}2)^{t-1}.$$

3.4.4. Прежде чем перейти к анализу уравнения Хикса в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни, рассмотрим промежуточный пример.

Он показывает, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни, процесс решение уравнения путем разложения в цепочку не требует никаких изменений. С методической точки зрения особая ценность примера в том, что он наглядно демонстрирует, как использование таких абстрактных инструментов, как комплексные числа, приводит к весьма реальным результатам.

Пример 3

Последовательность задана первыми двумя членами $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ и уравнением $a_{k+2} = a_{k+1} / a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Найти a_{2008}.

Решение

Прологарифмируем уравнение: $\ln a_{k+2} = \ln a_{k+1} - \ln a_k$, и обозначим $\ln a_k$ через y_k. В результате, имеем линейное разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 0. \qquad (3.4.14)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - m + 1 = 0$ имеет корни

$m_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ и $m_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

По теореме 1, уравнение (3.4.14) можно представить в виде цепочки уравнений

$$y_{k+1} = m_1 y_k + z_k, \tag{3.4.15}$$

$$z_{k+1} = m_2 z_k. \tag{3.4.16}$$

Из формулы (3.4.3) решение уравнения (3.4.16): $z_k = (m_2)^k z_0$.

Подставим найденное значение z_k в уравнение (3.4.15), и еще раз воспользовавшись формулой (3.4.3) получим

$$y_k = (m_1)^k y_0 + z_0 \frac{(m_2)^k - (m_1)^k}{m_2 - m_1}.$$

Разность корней $m_2 - m_1 = i\sqrt{3}$, а для того чтобы вычислить разность степеней, сначала воспользуемся тригонометрической формой записи комплексного числа:

$$m_2 = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 \quad \text{и} \quad m_1 = \cos\pi/3 - i\sin\pi/3,$$

и формулой Муавра:

$$(m_2)^{2008} = (\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)^{2008} = \cos(2008\pi/3) + i\sin(2008\pi/3) =$$

$$= \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

$$(m_1)^{2008} = (\cos\pi/3 - i\sin\pi/3)^{2008} = \cos(2008\pi/3) - i\sin(2008\pi/3) =$$

$$= \cos(4\pi/3) - i\sin(4\pi/3) = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь вычтем и получим, что $(m_2)^{2008} - (m_1)^{2008} = -i\sqrt{3}$.

Следовательно, $y_{2008} = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} y_0 + z_0(-1)$.

Из начальных условий следует, что $y_0 = \ln 2$,

$$z_0 = (\text{из уравнения (15)}) = y_1 - m_1 y_0 = \ln 3 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\ln 2.$$

Поэтому,

$$y_{2008} = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\ ln\,2 + \ (ln\,3 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}ln\,2)(-1) = -\,ln\,3 = ln\frac{1}{3}\ .$$

Отсюда следует, что $a_{2008} = 1/3$.

Повторяем, что ценность данного примера не в результате, а в методе, который использовался для его получения. А правильность полученного результата можно проверить исходя из следующих выкладок.:

Вычислим несколько элементов последовательности a_k :

$a_2 = a_1 / a_0 = 3/2;$

$a_3 = a_2 / a_1 = (3/2)/ 3 = 1/2;$

$a_4 = a_3 / a_2 = (1/2) / (3/2) = 1/3;$

$a_5 = a_4 / a_3 = (1/3) / (1/2) = 2/3;$

$a_6 = a_5 / a_4 = (2/3)/ (1/3) = 2;$

$a_7 = a_6 / a_5 = 3/ (3/2) = 3.$

Можно продолжать, но как говорят, «главное - вовремя остановиться». Нужно заметить, что $a_6 = a_0$; $a_7 = a_1$. Это означает, что элементы последовательности a_k повторяются через 6 номеров.

Следовательно, $a_{2004} = a_0 = 2$; $a_{2005} = a_1 = 3$; $a_{2006} = a_2 = 3/2$; $a_{2007} = a_3 = 1/2$; $a_{2008} = a_4 = 1/3$.

3.4.5. Пример 4

Возвращаемся к уравнению Хикса. Предположим, что коэффициент a равен $0,4608$, а величина инвестиций в каждый момент времени меньше прироста потребления: $c = 0,5625$. Пусть величина автономного потребления b равна $13,48$, величина ВВП в исходный момент времени (Y_0) равна 125, в следующем периоде (Y_1) есть 120.

Тогда, согласно уравнению (3.4.3) изменение ВВП описывается уравнением

$$Y_{t+2} - 0,72Y_{t+1} + 0,2592Y_t = 13,48 \quad (t = 0, 1,\ldots) \qquad (3.4.17)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - 0,72m + 0,2592 = 0$ имеет корни

$$m_1 = 0,36 + \sqrt{0,1296-0,2592} = 0,36 + \sqrt{-0,1296} = 0,36 + i\ 0,36$$

и $$m_2 = 0,36 - \sqrt{0,1296-0,2592} = 0,36 - \sqrt{-0,1296} = 0,36 - i\ 0,36.$$

Поэтому, уравнение (3.4.17) можно представить в виде цепочки уравнений

$$z_{t+1} - m_1 z_t = 13{,}48, \qquad (3.4.18)$$

$$Y_{t+1} - m_2 Y_t = z_t\,. \qquad (3.4.19)$$

с начальными условиями $Y_0 = 125$ и $z_0 = 120 - m_2 125 = 75 + 45i$.

Тогда, решение уравнения (3.4.18)

$$z_t = (m_1)^t(75 + 45i) + 13{,}48\,\frac{1-(m_1)^t}{1-m_1} = 16 + 9i + (59 + 36i)\,(m_1)^t.$$

Подставив найденное значение z_t в уравнение (3.4.19) и еще раз использовав формулу (3.4.3), получим

$$Y_t = (m_2)^t 125 + (16 + 9i)\frac{1-(m_2)^t}{1-m_2} + (59 + 36i)\,\frac{(m_1)^t-(m_2)^t}{m_1-m_2} =$$

$$= (m_2)^t 125 + (1 - (m_2)^t)25 + \frac{59+36i}{0{,}72i}\,[(m_1)^t - (m_2)^t] =$$

$$= 25 + 100(m_2)^t + \frac{59+36i}{0{,}72i}\,[(m_1)^t - (m_2)^t].$$

Воспользуемся тригонометрической формой записи комплексного числа:

$m_1 = 0{,}36\sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$ и $m_2 = 0{,}36\sqrt{2}\,(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)$,

и формулой Муавра:

$$(m_2)^t = [0{,}36\sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)]^t = [0{,}36\sqrt{2}\,]^t(\cos\pi t/4 + i\sin\pi t/4),$$

$$(m_1)^t = [0{,}36\sqrt{2}\,(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)]^t = [0{,}36\sqrt{2}\,]^t(\cos\pi t/4 - i\sin\pi t/4).$$

Тогда $Y_t = 25 + [0{,}36\sqrt{2}\,]^t\left(100\cos\pi t/4 + \dfrac{59}{0{,}36}\sin\pi t/4\right).$

Для того чтобы убедиться в правильности проведенных выкладок, полезно подсчитать значения функции Y_t при $t = 0, 1$ и убедиться в том, что они совпадают с начальными данными.

Кроме того, несложно видеть, что с ростом t значения функции Y_t убывают. Этот факт имеет вполне прозрачный экономический смысл: если прирост потребления превышает величину инвестиций, то ВВП будет уменьшаться.

§3.5. Модели ценовой конкуренции на языке систем линейных разностных уравнений

В этом параграфе мы приводим новый метод решения систем линейных разностных уравнений.

3.5.1. Следующая модель описывает модель ценообразования при дуополии, то есть на рынке с двумя фирмами. При этом предполагается, что есть лидирующая фирма — фирма, самостоятельно устанавливающая цены и ведомая фирма — фирма, устанавливающая цену на свой товар, ориентируясь на цены фирмы лидера.

Пример 1

Фирмы Н и В продают похожий товар и в каждом периоде устанавливают цены на свой товар, опираясь на цены прошлого периода, следующим образом: Н берет 80% своей цены и добавляет $20 в 1-м периоде, а в каждом последующем периоде на $2 больше.

В берет 30% цены Н, 75% своей цены и отнимает от суммы $10 в 1-м периоде, а в каждом последующем периоде отнимает на 25% меньше.

Зная, что в начальный момент времени цена у Н $120, у В $130 проследим динамику изменения цен.

Пусть x_n – это цена товара Н, а y_n – цена товара В в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_n = 0{,}8x_{n-1} + 20 + 2(n-1), & x_0 = 120, \\ y_n = 0{,}3x_{n-1} + 0{,}75y_{n-1} - 10(0{,}75)^{n-1}, & y_0 = 130. \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

Из 1-го уравнения системы (3.4.1), получим функцию, описывающую изменение цены товара Н

$$x_n = (0{,}8)^n \cdot 120 + 20\frac{1-(0{,}8)^n}{1-0{,}8} + 2\frac{(0{,}8)^n - 0{,}8n + (n-1)}{(1-0{,}8)^2} = 70(0{,}8)^n + 50 + 10n.$$

Подставив значение x_n во 2-ое уравнение системы (3.5.1), получим уравнение $y_n = 0{,}75y_{n-1} + 21(0{,}8)^{n-1} + 15 + 3(n-1) - 10(0{,}75)^{n-1}$.

Это уравнение так же является линейным разностным уравнением 1-го порядка. Поэтому, его решение, описывающее изменение цены товара В, получаем из формул для его решения: $y_n = (0,75)^n \cdot 130 - 10n(0,75)^{n-1} +$

$$+15\frac{1-(0,75)^n}{1-0,75} + 21\frac{(0,8)^n - (0,75)^n}{0,8-0,75} + 3\frac{(0,75)^n - 0,75n + (n-1)}{(1-0,75)^2} =$$

$$= -302(0,75)^n + 420(0,8)^n + 12 + 12n - 10n(0,75)^{n-1}.$$

3.5.2. Оказывается таким образом можно решать и системы общего вида — системы двух линейных разностных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + f_n\,, \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + g_n\,, \end{cases} \tag{3.5.2}$$

где коэффициенты a, b, c, d – постоянные числа, а f_n и g_n – функции.

Пример 2

Фирмы Н и Ж в каждом периоде устанавливают цены на свой товар опираясь на цены прошлого периода следующим образом:

Н берет 100% своей цены, отнимает 6% цены Ж и добавляет к сумме \$60.

В свою очередь, Ж берет 100% цены Н, 50% своей цены и добавляет к сумме \$100.

Зная, что в начальный момент времени цена у Н \$245, а у Ж \$150, проследите динамику изменения цен.

Если u_n – это цена установленная Н, а a_n – цена установленная Ж в периоде с номером n, то имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 0,06a_n + 60, & u_0 = 245, \\ a_{n+1} = u_n + 0,5a_n + 100, & a_0 = 150. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Составим и решим характеристическое уравнение системы (3.5.3):

$$\begin{vmatrix} 1-k & -0,06 \\ 1 & 0,5-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - k)(0,5 - k) - 1\cdot(-0,06) = 0 =>$$

$$=> k^2 - 1,5k + 0,56 = 0 \;=>\; k_1 = 0,8;\;\; k_2 = 0,7.$$

Используем корень характеристического уравнения $k_1 = 0,8$ для того чтобы переписать систему (3.5.3) в виде

$$\begin{cases} u_{n+1} - 0,8u_n = (1-0,8)u_n - 0,06a_n + 60, \\ a_{n+1} - 0,8a_n = u_n + (0,5-0,8)a_n + 100. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} u_{n+1} - 0,8u_n = 0,2u_n - 0,06a_n + 60, \\ a_{n+1} - 0,8a_n = u_n - 0,3a_n + 100. \end{cases} \qquad (3.5.4)$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.5.4) на $0,2$ и вычтем из 1-го:

$$(u_{n+1} - 0,2\,a_{n+1}) - 0,8(u_n - 0,2a_n) = 40\ .$$

Полученное уравнение, является линейным разностным уравнением 1-го порядка и его решение:

$$u_n - 0,2a_n = 215(0,8)^n + 40\frac{1-(0,8)^n}{1-(0,8)} = 200 + 15(0,8)^n\ . \qquad (3.5.5)$$

Число 215 есть начальное условие u_0 - $0,2a_0$: $245 - 0,2 \cdot 150 = 215.$

Повторим процедуру, взяв 2-ой корень характеристического уравнения $k_2 = 0,7$: Перепишем систему (3.5.5) в виде

$$\begin{cases} u_{n+1} - 0,7u_n = 0,3u_n - 0,06a_n + 60, \\ a_{n+1} - 0,7a_n = u_n - 0,2a_n + 100. \end{cases} \qquad (3.5.6)$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.5.6) на $0,3$ и вычтем из 1-го:

$$(u_{n+1} - 0,3\,a_{n+1}) - 0,7(u_n - 0,3a_n) = 30\ .$$

Решение полученного уравнения при начальном условии u_0 - $0,3a_0 = 200$ имеет вид:

$$u_n - 0,3a_n = 100 + 150(0,7)^n\ . \qquad (3.5.7)$$

Равенства (3.5.5) и (3.5.7) составляют систему, из которой можно найти u_n и a_n:

$$\begin{cases} u_n - 0,2a_n = 200 + 15(0,8)^n\ , \\ u_n - 0,3a_n = 100 + 150(0,7)^n. \end{cases} \qquad (3.5.8)$$

Вычтем из первого уравнения системы (3.5.8) второе:

$$0,1a_n = 100 + 15(0,8)^n - 150(0,7)^n\ ,$$

и умножив на 10, получим, что $a_n = 1000 + 150(0,8)^n - 1500(0,7)^n$.

Подставив значение a_n в (3.5.5), получим, что

$$u_n = 200 + 15(0,8)^n + 0,2(1000 + 150(0,8)^n - 1500(0,7)^n) =$$

$$= 400 + 45(0,8)^n - 300(0,7)^n .$$

3.5.3. Формализуем процесс нахождения решения систем вида (3.5.2). Характеристическое уравнение системы (3.5.2) это уравнение $\Delta(\lambda) = 0$, где функция $\Delta(\lambda)$ определяется коэффициентами системы (3.5.2) следующим образом:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - c\cdot b.$$

Корни характеристического уравнения называются характеристическими числами системы (3.5.2).

Пусть p и q характеристические числа системы. Тогда, для того чтобы решить систему, сперва вычтем функцию px_n от левой и правой частей 1-го уравнения системы (3.5.2) и py_n от обеих частей 2-го уравнения:

$$\begin{cases} x_{n+1} - px_n = ax_n - px_n + by_n + f_n , \\ y_{n+1} - py_n = cx_n + dy_n - py_n + g_n , \end{cases} \qquad (3.5.9)$$

Так как число p является характеристическим, определитель $\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}$ равен нулю, а это значит, что строчки определителя пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности через k.

Умножим 2-ое уравнение на k

$$\begin{cases} x_{n+1} - px_n = (a-p)x_n + by_n + f_n , \\ k[y_{n+1} - py_n] = k[cx_n + (d-p)y_n] + kg_n , \end{cases}$$

и вычтем второе уравнение из первого.

Тогда

$$(x_{n+1} - ky_{n+1}) - p(x_n - ky_n) = f_n - kg_n. \qquad (3.5.10)$$

Уравнение (3.5.10) является линейным разностным уравнением 1-го порядка. Решив его, найдем функцию $(x_n - ky_n)$.

Повторим процедуру, взяв q вместо p, и получим систему относительно неизвестных x_n и y_n. Решив полученную алгебраическую систему, получим решение исходной системы (3.5.2).

3.5.4. Алгоритм решения системы (3.5.2) предполагает использование двух корней характеристического уравнения. А что делать в ситуации, когда характеристическое уравнение имеет один кратный корень?

Пример 3

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}7x_n + 0{,}25y_n + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n \,, \\ y_{n+1} = -0{,}04x_n + 0{,}9y_n - 2 \,, \end{cases} \tag{3.5.12}$$

с начальными условиями $x_0 = 3$ и $y_0 = 2$.

Характеристическое уравнение системы (3.5.12)

$$\begin{vmatrix} 0{,}7 - k & 0{,}25 \\ -0{,}04 & 0{,}9 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0{,}7 - k)(0{,}9 - k) - (-0{,}04) \cdot (0{,}25) = 0$$

$k^2 - 1{,}6k + 0{,}64 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0{,}8$.

Используя корень характеристического уравнения, перепишем систему (3.5.12) в виде

$$\begin{cases} x_{n+1} - 0{,}8x_n = -0{,}1x_n + 0{,}25y_n + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n \,, \\ y_{n+1} - 0{,}8y_n = -0{,}04x_n + 0{,}1y_n - 2 \,, \end{cases} \tag{3.5.13}$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.5.13) на 2,5 и вычтем из 1-го:

$$(x_{n+1} - 2{,}5y_{n+1}) = 0{,}8(x_n - 2{,}5y_n) + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n + 5.$$

Полученное уравнение, является линейным разностным уравнением 1-го порядка и его решение:

$$x_n - 2{,}5y_n = -2(0{,}8)^n + 5\frac{1-(0{,}8)^n}{1-(0{,}8)} + 0{,}1\frac{(0{,}9)^n - (0{,}8)^n}{0{,}9 - 0{,}8} \,.$$

Коэффициент (-2) есть начальное условие $x_0 - 2{,}5y_0 = 3 - 2{,}5 \cdot 2 = -2$.

Приведем подобные члены, и получим

$$x_n - 2{,}5y_n = 25 - 28 \cdot (0{,}8)^n + 0{,}9^n. \tag{3.5.14}$$

Для того чтобы продолжить процесс нахождения решения, нужно заметить, что выражение $x_n - 2{,}5y_n$ с коэффициентом ($-0{,}1$) стоит в правой части 1-го уравнения системы (3.5.13), и с коэффициентом ($-0{,}04$) в правой части 2-го уравнения. Поэтому, заменив $x_n - 2{,}5y_n$ в правой части 1-го уравнения системы (3.5.13) на его значение из равенства (3.5.14), получим уравнение

$$x_{n+1} - 0{,}8x_n = -0{,}1[25 - 28\cdot(0{,}8)^n + 0{,}9^n] + 0{,}1\cdot 0{,}9^n \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - 0{,}8x_n = -2{,}5 + 2{,}8\cdot(0{,}8)^n .$$

Его решение $x_n = 3(0{,}8)^n - 2{,}5\dfrac{1-(0{,}8)^n}{1-(0{,}8)} + 2{,}8n0{,}8^{n-1} =$

$$= 3(0{,}8)^n - 12{,}5 + 12{,}5(0{,}8)^n + 3{,}5n(0{,}8)^n = [15{,}5 + 3{,}5n](0{,}8)^n - 12{,}5.$$

Подставив выражение для $x_n - 2{,}5y_n$ в правую часть 2-го уравнения системы (3.5.13) так же как мы только что получили x_n , можно вычислить y_n . Но это гораздо проще сделать из равенства (3.5.14):

$$x_n - 2{,}5y_n = 25 - 28\cdot(0{,}8)^n + 0{,}9^n \Rightarrow 2{,}5y_n = x_n - [25 - 28\cdot(0{,}8)^n + 0{,}9^n]$$

$$\Rightarrow 2{,}5y_n = [15{,}5 + 3{,}5n](0{,}8)^n - 12{,}5 - 25 + 28\cdot(0{,}8)^n - 0{,}9^n$$

$$\Rightarrow 2{,}5y_n = [43{,}5 + 3{,}5n](0{,}8)^n - 37{,}5 - 0{,}9^n$$

$$\Rightarrow y_n = [17{,}4 + 1{,}4n](0{,}8)^n - 15 - 0{,}4(0{,}9)^n .$$

3.5.5. Можно считать, что при решении системы (3.5.12) нам повезло: в правой части системы (3.5.13) было выражение $x_n - 2{,}5y_n$, и это позволило нам завершить процесс решения. К счастью, подобное везение будет сопровождать нас всегда. Докажем это.

Характеристическое уравнение системы (3.5.4) $\Delta(k) = 0$ имеет только один корень, если $\Delta(k) = (a - k)(d - k) - c\cdot b = (r - k)^2$, где r есть значение характеристического числа. Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k , получим, что $r = (a + d)/2$.

Поэтому, систему (3.5.2) в этом случае можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_{n+1} - \dfrac{a+d}{2}px_n = ax_n - \dfrac{a+d}{2}x_n + by_n + f_n , \\ y_{n+1} - \dfrac{a+d}{2}y_n = cx_n + dy_n - \dfrac{a+d}{2}y_n + g_n , \end{cases}$$

и отсюда

$$\begin{cases} x_{n+1} - \dfrac{a+d}{2} px_n = \dfrac{a-d}{2} x_n + by_n + f_n , \\ y_{n+1} - \dfrac{a+d}{2} y_n = cx_n - \dfrac{a-d}{2} y_n + g_n \end{cases} \qquad (3.5.15)$$

Так как число $(a+d)/2$ является характеристическим, определитель $\begin{vmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & -\dfrac{a-d}{2} \end{vmatrix}$ равен нулю. Тогда $c = -\dfrac{(a-d)^2}{4b}$ и систему (3.5.15) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_{n+1} - \dfrac{a+d}{2} px_n = \dfrac{a-d}{2} x_n + by_n + f_n , \\ y_{n+1} - \dfrac{a+d}{2} y_n = -\dfrac{(a-d)^2}{4b} x_n - \dfrac{a-d}{2} y_n + g_n \end{cases} \qquad (3.5.16)$$

Умножив 1-ое уравнение системы (3.5.16) на $\dfrac{a-b}{2}$, и прибавив к результату 2-ое уравнение, умноженное на b, получим линейное разностное уравнение 1-го порядка, решение которого есть функция вида

$\dfrac{a-b}{2} x_n + by_n = F(n).$

Выражение $\dfrac{a-b}{2} x_n + by_n$ стоит в правой части 1-го уравнения системы (3.5.16), и с коэффициентом $-\dfrac{a-b}{2b}$ в правой части 2-го уравнения системы (3.4.16) .

§3.6. Обобщенная модель Самуэльсона

Пусть Y_t это величина ВВП, C_t - потребление, I_t - инвестиции, $AUC(t)$ – автономное потребление, $G(t)$ – государственные расходы и $NX(t)$ – величина чистого экспорта в период времени t. Считаем, что функции $AUC(t)$, $G(t)$ и $NX(t)$ заданы.

Обобщая модель Самуэльсона, изученную в параграфе 3.4, будем предполагать, что вышеупомянутые величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$Y_t = C_t + I_t + G(t) + NX(t), \qquad (3.6.1)$$

$$C_{t+1} = aY_t + AUC(t), \qquad (3.6.2)$$

$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t), \qquad (3.6.3)$$

где a и c являются константами.

Сведем систему уравнений (3.6.1) – (3.6.3) к системе 2-х линейных разностных уравнений 1-го порядка. С этой целью, подставим значение Y_t из уравнения (3.6.1) в уравнение (3.6.2) и получим уравнение

$$C_{t+1} = aC_t + aI_t + aG(t) + aNX(t) + AUC(t). \qquad (3.6.4)$$

Далее, подставим значение C_{t+1} из уравнения (3.6.4) в уравнение (3.6.3):

$$I_{t+1} = c(aC_t + aI_t + aG(t) + aNX(t) + AUC(t) - C_t).$$

Приведя подобные члены, приходим к системе уравнений относительно неизвестных C_t и I_t:

$$\begin{cases} C_{t+1} = a[C_t + I_t + G(t) + NX(t)] + AUC(t), \\ I_{t+1} = c\{(a-1)C_t + a[I_t + G(t) + NX(t)] + cAUC(t)\}. \end{cases} \qquad (3.6.5)$$

3.6.1. Простая закрытая экономика

Рассмотрим классический вариант модели Самуэльсона.

$$Y_t = C_t + I_t, \qquad (3.6.6)$$

$$C_{t+1} = aY_t + b, \qquad (3.6.7)$$

$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t), \qquad (3.6.8)$$

Стандартный подход к решению системы (3.6.6) - (3.6.8) заключается в сведении к линейному разностному уравнению 2-го порядка.

Для этого воспользуемся тем, что уравнения (3.6.6) – (3.6.8) справедливы для всех $t = 0,1 \ldots$, и заменим t на $t+1$ в (3.6.7) и (3.6.8) и t на $t+2$ в (3.6.6), для того чтобы получить

$$C_{t+2} = aY_{t+1} + b \qquad (3.6.7a)$$

$$I_{t+2} = c(C_{t+2} - C_{t+l}) \qquad (3.6.8a)$$

$$Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2} \qquad (3.6.6a)$$

Подставляя (3.6.7) и (3.6.7а) в (3.6.8а) получаем, что $I_{t+2} = ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Подставив этот результат и (3.6.7а) в (3.6.6а), получим

$$Y_{t+2} = aY_{t+1} + b + ac(Y_{t+1} - Y_t).$$

Приведя подобные члены, приходим к уравнению

$$Y_{t+2} - a(1 + c)Y_{t+1} + acY_t = b. \quad (t = 0, 1,\ldots) \qquad (3.6.9)$$

В отличие от этого подхода мы будем использовать систему (3.6.5). Дело в том, что систему (3.6.1)-(3.6.3) не всегда можно свести к уравнению вида (3.6.9).

Таким образом, использование систем позволяет охватить более широкий класс задач.

Пример 1

*Предположим, что коэффициент **a**, выражающий предельную склонность к потреблению равен 0,9, а величина инвестиций в каждый момент времени превышает прирост потребления в два раза: **c** =2.*

Также предположим, что величина автономного потребления b равна 10, потребление в исходный момент времени (C_0) равно 70, величина инвестиций (I_0) равна 10.

Тогда, согласно (3.6.5) изменение потребления и инвестиций описывается системой

$$\begin{cases} C_{t+1} = 0{,}9C_t + 0{,}9I_t + 10, \\ I_{t+1} = 2(0{,}9 - 1)C_t + 0{,}9 \cdot 2I_t + 2 \cdot 10. \end{cases} \qquad (3.6.10)$$

Решение системы (3.6.10) начнем с составления и решения характеристического уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0{,}9 - k & 0{,}9 \\ -0{,}2 & 1{,}8 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0{,}9 - k)(1{,}8 - k) - 0{,}9 \cdot (-0{,}2) = 0 =>$$

$$=> k^2 - 2{,}7k + 1{,}8 = 0 \;=>\; k_1 = 1{,}5; \quad k_2 = 1{,}2.$$

Используем корень характеристического уравнения $k_1 = 1{,}5$ для того чтобы переписать систему (3.6.10) в виде

$$\begin{cases} C_{t+1} - 1{,}5C_t = 0{,}9C_t - 1{,}5C_t + 0{,}9I_t + 10, \\ I_{t+1} - 1{,}5I_t = -0{,}2C_t + 1{,}8I_t - 1{,}5I_t + 20. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_{t+1} - 1{,}5C_t = -0{,}6C_t + 0{,}9I_t + 10, \\ I_{t+1} - 1{,}5I_t = -0{,}2C_t + 0{,}3I_t + 20. \end{cases} \qquad (3.6.11)$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.6.11) на 3 и вычтем из 1-го:

$$(C_{t+1} - 3I_{t+1}) - 1{,}5(C_t - 3I_t) = -50\,.$$

Полученное уравнение, является линейным разностным уравнением 1-го порядка и его решение

$$C_t - 3I_t = 40(1{,}5)^t - 50\frac{1-(1{,}5)^t}{1-(1{,}5)} = 100 - 60(1{,}5)^t. \qquad (3.6.12)$$

Число 40 есть начальное условие $C_0 - 3I_0$: $70 - 3\cdot 10 = 40.$

Повторим процедуру, взяв 2-ой корень характеристического уравнения $k_2 = 1{,}2$: Перепишем систему (3.6.10) в виде

$$\begin{cases} C_{t+1} - 1{,}2C_t = -0{,}3C_t + 0{,}9I_t + 10, \\ I_{t+1} - 1{,}2I_t = -0{,}2C_t + 0{,}6I_t + 20. \end{cases} \qquad (3.6.13)$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.6.13) на $1{,}5$ и вычтем из 1-го:

$$(C_{t+1} - 1{,}5I_{t+1}) - 1{,}2(C_t - 1{,}5I_t) = -20..$$

Решение полученного уравнения при начальном условии

$C_0 - 1{,}5I_0 = 70 - 1{,}5\cdot 10 = 55$ имеет вид

$$C_t - 1{,}5I_t = 55(1{,}2)^t - 20\frac{1-(1{,}2)^t}{1-(1{,}2)} = 100 - 45(1{,}2)^t. \qquad (3.6.14)$$

Равенства (3.6.12) и (3.6.14) составляют систему, из которой можно найти C_t и I_t :

$$\begin{cases} C_t - 1{,}5I_t = 100 - 45(1{,}2)^t, \\ C_t - 3I_t = 100 - 60(1{,}5)^t. \end{cases} \qquad (3.6.15)$$

Вычтем из 1-го уравнения системы (3.6.15) 2-ое: $1{,}5\,I_t = -45(1{,}2)^t + 60(1{,}5)^t$, и разделив на $1{,}5$, получим, что $I_t = -30(1{,}2)^t + 40(1{,}5)^t$.

Подставив значение I_t в (3.6.12), получим, что

$C_t = 100 - 60(1{,}5)^t + 3[40(1{,}5)^t - 30(1{,}2)^t] = 100 + 60(1{,}5)^t - 90(1{,}2)^t.$

Обратившись к (3.6.6) получим функцию, описывающую изменение ВВП:

$$Y_t = C_t + I_t = [100 + 60(1{,}5)^t - 90(1{,}2)^t] + [-30(1{,}2)^t + 40(1{,}5)^t] =$$
$$= 100 + 100(1{,}5)^t - 120(1{,}2)^t.$$

Функция Y_t является растущей, и несложно понять, что определяющим моментом является значение коэффициента $c = 2$.

3.6.2. Обобщенная модель

Пример 2

Предположим, что коэффициент ***a****, выражающий предельную склонность к потреблению равен 0,9.375, а величина инвестиций в каждый момент времени составляет 60% от прироста потребления:* ***c*** *=2.*

Также предположим, что величина автономного потребления равна 338 в начальный момент и возрастает на 1% ежегодно; государственные расходы равны 200 в начальный момент и возрастают на 10 единиц ежегодно; чистый экспорт равен 40 в начальный момент и убывает на 5% ежегодно; потребление в исходный момент времени (C_0) равно 1000; величина инвестиций (I_0) равна 800.

В этом случае, согласно (3.6.5) имеет место система

$$\begin{cases} C_{t+1} = 0{,}9375[C_t + I_t + 200 + 10t + 40(0{,}95)^t] + 338(1{,}01)^t, \\ I_{t+1} = 0{,}6\{-0{,}0625C_t + 0{,}9375[I_t + 200 + 10t + 40(0{,}95)^t] + 338(1{,}01)^t\}. \end{cases} \qquad (3.6.16)$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 0{,}9375 - k & 0{,}9375 \\ -0{,}0375 & 0{,}5625 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0{,}9375 - k)(0{,}5625 - k) - 0{,}9375 \cdot (-0{,}0375) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - 1{,}5k + 0{,}5625 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0{,}75.$$

Корень характеристического уравнения $k_1 = 0{,}75$ позволяет переписать систему (3.6.16) в виде

$$\begin{cases} C_{t+1} - 0{,}75C_t = 0{,}1875C_t + 0{,}9375[I_t + 200 + 10t + 40(0{,}95)^t] + 338(1{,}01)^t, \\ I_{t+1} - 0{,}75I_t = -0{,}0375C_t - 0{,}1875I_t + 112{,}5 + 5{,}625t + 22{,}5(0{,}95)^t + 202{,}8(1{,}01)^t \end{cases}$$

Умножим 2-ое уравнение системы (3.6.11) на 5 и прибавим к 1-му:

$$(C_{t+1} + 5I_{t+1}) - 0{,}75(C_t - 3I_t) = 750 + 37{,}5 + 150(0{,}95)^t + 1352(1{,}01)^t.$$

Решение полученного линейного разностного уравнения, с начальным условием $C_0 + 5I_0 = 1000 + 5 \cdot 800 = 5000$:

$$C_t + 5I_t = 2840 - 3790(0,75)^t + 40t + 750(0,95)^t + 5200(1,01)^t . \qquad (3.6.17)$$

Отметим, что второе уравнение преобразованной системы (3.6.16) можно записать в виде

$$I_{t+1} - 0,75I_t = -0,0375[C_t + 5I_t] + 112,5 + 5,625t + 22,5(0,95)^t + 202,8(1,01)^t .$$

Поэтому, заменив выражение в квадратных скобках, на его значение из (3.6.17) и приведя подобные члены, получим

$$I_{t+1} - 0,75I_t = 6 + 142,125(0,75)^t + 4,125t - 5,625(0,95)^t + 7,8(1,01)^t . \qquad (3.6.18)$$

Решение уравнения (3.6.18) при начальном условии $I_0 = 800$:

$$I_t = -42 + 840,125(0,75)^t - 16,5t - 28,125(0,95)^t + 30(1,01)^t + 189,5t(0,75)^t .$$

Отсюда, воспользовавшись (3.6.17), можно найти C_t :

$$C_t = [2840 - 3790(0,75)^t + 40t + 750(0,95)^t + 5200(1,01)^t] - 5I_t =$$

$$=3050 - 7990,625(0,75)^t - 122,5t - 890,625(0,95)^t + 5050(1,01)^t - 947,5t(0,75)^t.$$

Итак, мы получили функции, описывающие изменение потребления и инвестиций во времени при заданных условиях.

Также, воспользовавшись равенством $Y_t = C_t + I_t$, мы можем выписать функцию, описывающую изменение ВВП: $Y_t = C_t + I_t =$

$$[3050 - 7990,625(0,75)^t - 122,5t - 890,625(0,95)^t + 5050(1,01)^t - 947,5t(0,75)^t] +$$

$$+ [-42 + 840,125(0,75)^t - 16,5t - 28,125(0,95)^t + 30(1,01)^t + 189,5t(0,75)^t] =$$

$$= 3008 - 7150,5(0,75)^t + 106t + 862,5(0,95)^t + 5080(1,01)^t - 758t(0,75)^t.$$

Заключение по главе 3

Обсуждению ситуации, которая сложилась в банковском секторе Кыргызстана, доказательству наличия признаков картеля в этом секторе, предложениям по ее улучшению посвящен первый параграф третьей главы. Одна из главных мыслей: главной целью деятельности Национального Банка Кыргызской Республики совместно с Правительством должно быть достижение быстрого роста ВВП, а обеспечение стабильности цен должно быть следствием [105 - 116]. В связи с этим, сошлемся на мнение лауреата нобелевской премии по экономике 1995 года: *Говоря о формулировке целей Европейским центральным банком, Р. Лукас-младший говорил, что ему нравится формулирование цели с точки зрения номинального объема ВВП, а затем использование правила* *постепенной реакции для монетарной базы, чтобы система продолжала двигаться к поставленной цели. Если заменить «номинальный ВВП» на «уровень инфляции», такая политика будет выглядеть привлекательно, но уже меньше* [5]

Для изучения различных явлений используются их упрощенные формальные описания, которые анализируются с помощью математических моделей. Модели, в зависимости от учета фактора времени, делятся на статические и динамические. В статических моделях не учитывается зависимость от времени. В динамических отражается зависимость переменных от времени и их временная взаимосвязь. Время может рассматриваться как непрерывное или дискретное. Модели с непрерывным временем чаще используют для моделирования, так как они позволяют использовать хорошо развитый аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Они обсуждаются в следующей главе. Дискретные модели удобнее для приложений, поскольку статистические данные всегда дискретны и относятся к конкретным единицам времени.

Несмотря на то, что на языке разностных уравнений гораздо проще моделировать различные явления, их практически не изучают в высшей школе. Возможно, дело в том, что теория разностных уравнений слабо освещена в научной и учебной литературе.

Умение моделировать экономические процессы является необходимым для любого серьёзного исследователя. При этом, к сожалению, очень часто, студенты и начинающие ученые не понимают, каким образом реальная ситуация может быть смоделирована — переведена на язык математики. В связи с этим считаем, что наряду с дифференциальными уравнениями необходимо использовать и разностные уравнения, которые позволяют более явно проследить процесс построения модели. В связи с этим основная часть главы 3 посвящена методам моделирования различных экономических ситуаций при помощи линейных разностных уравнений различных порядков, а также их систем.

ГЛАВА 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§4.1. Маржинальная прибыль, амортизация, распространение информации и другие простые модели

Законы вселенной написаны на языке математики. Алгебраических методов достаточно для решения большинства статических проблем, но наиболее интересные явления окружающей нас действительности являются динамическими и описываются уравнениями, содержащими изменяющиеся величины.

Так как производная функции $y = f(x)$ есть скорость изменения величины y, это естественно, что уравнения, содержащие производные часто используются для описания изменяющейся действительности.

Уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные, называется дифференциальным.

4.1.1. Задача нахождения первообразной является самым элементарным примером на дифференциальные уравнения.

Задача 1

Определить функцию выручки, зная, что функция маржинальной выручки имеет вид $MR = 10 – 0,2q$.

Решение задачи начнем с напоминания о том, что в экономической теории маржинальная величина есть производная от общей величины. Кроме того, стоит принять во внимание то, что при нулевом объеме продаж выручка равна нулю.

Поэтому, с математической точки зрения в задаче 1 требуется решить дифференциальное уравнение

$$R' = 10 – 0,2q$$

при начальном условии $R(0) = 0$.

Проинтегрировав уравнение, получим его общее решение – множество функций вида

$$R(q) = 10q - 0,1q^2 + C, \qquad (4.1.1)$$

где каждая функция отличается от других только значением постоянной C.

Для того чтобы закончить решение задачи осталось найти частное решение — выделить из множества функций вида (4.1.1), функцию удовлетворяющую начальному условию:

из начального условия $R(0) = 0$ получим $C = 0$.

Следовательно, в данном случае величина выручки описывается функцией $R(q) = 10q - 0{,}1q^2$.

Задача 2

Определить издержки производства 30 единиц товара, зная, что функция маржинальных издержек имеет вид $MC = 0{,}3q^2 - 12q + 610$, *а издержки производства 10 единиц товара равны 11200.*

Итак, имеет место дифференциальное уравнение

$$C' = 0{,}3q^2 - 12q + 610.$$

Нетрудно определить, что его общее решение

$$C = 0{,}1q^3 - 6q^2 + 610q + A.$$

Для того чтобы выделить нужное частное решение – определить значение константы интегрирования A, решим уравнение

$$0{,}1(10)^3 – 6(10)^2 + 610(10) + A = 11200.$$

Так как $C(0) = A$, из экономического смысла следует, что найденное значение $A = 5600$ есть величина постоянных затрат. Этот факт символически записывают так: $FC = 5600$. Тогда издержки производства 30 единиц товара равны $C(30) = 0{,}1(30)^3 – 6(30)^2 + 610(30) + 5600 = 21200$.

Следующий пример относится к макроэкономике.

Задача 3

Определить функцию сбережений, зная, что маржинальная склонность к сбережению есть функция $MPS = 0{,}33 – 0{,}1Y^{-0,5}$, *величина сбережений* $S(Y)$ *равна нулю, когда величина дохода* Y *равна 64.*

Так как маржинальная величина есть производная от общей величины, имеет место дифференциальное уравнение

$$S' = 0{,}33 - 0{,}1Y^{-0,5} .$$

Проинтегрировав, получим $S(Y) = 0{,}33Y - 0{,}2Y^{0,5} + c$.

Далее, условие $S(64) = 0$, позволяет определить значение константы интегрирования c: $0 = 0,33 \cdot 64 - 0,2 \cdot (64)^{0,5} + c \Rightarrow c = -19,52$.

Следовательно, функция сбережения есть функция

$$S(Y) = 0,33Y - 0,2Y^{0,5} - 19,52.$$

Итак, простейшее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'(x) = f(x), \qquad (4.1.2)$$

где $f(x)$ заданная, известная функция.

(Следует отметить, что дифференциальные уравнения, особенно 1-го порядка, часто записываются с помощью дифференциалов, то есть используется обозначение $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.)

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ называется общим решением дифференциального уравнения (4.1.2), а каждая из первообразных, составляющих неопределенный интеграл — частным решением.

Задача на определение частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию (в случае уравнений высоких порядков – начальным условиям) называется задачей Коши, а ее решение, на геометрическом языке — интегральной кривой.

Из вышесказанного следует, что все изучавшие математический анализ уже не раз встречались с дифференциальными уравнениями и их решениями — например, для того чтобы составить набор упражнений на дифференциальные уравнения и указать их решения, достаточно взять таблицу интегралов.

Определение

Дифференциальное уравнение, которое можно привести к виду (4.1.2), будем называть *интегрируемым в квадратурах*.

4.1.2. Дифференциальные уравнения, которые можно записать в виде

$$y' = f(x)g(y), \qquad (4.1.3)$$

где $f(x)$ и $g(y)$ - заданные функции, называются *уравнениями с разделяющимися переменными.*

Если функция $y = w(x)$ является решением уравнения $g(y) = 0$, то только в случае когда $w(x)$ является числом, функция $y = w(x)$ ($w(x)$ - постоянная) является решением уравнения (4.1.3).

Для тех y, для которых $g(y) \neq 0$, уравнение (4.1.3) равносильно уравнению

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x). \qquad (4.1.4)$$

В этом уравнении переменная y присутствует лишь в левой части, а переменная x— лишь в правой части. Поэтому вместо слов «перейдем от уравнения (4.1.3) к уравнению (4.1.4)» часто говорят «в уравнении (4.1.3) разделим переменные».

Введя обозначение $Y = \int \frac{1}{g(y)} dy$, уравнение (4.1.3) можно переписать в виде $Y' = f(x)$. Тем самым мы показали, что уравнение с *разделяющимися переменными* является интегрируемым в квадратурах, а его решение может быть записано в виде $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$.

Задача 5

Определить функцию спроса $q = D(p)$, которая при всех значениях цены p имеет один и тот же коэффициент эластичности спроса.

По определению, коэффициент эластичности спроса по цене e вычисляется по формуле $e = q'(p)\frac{p}{q}$.

Поэтому, задача 4 сводится к решению уравнения

$$q'(p)\frac{p}{q} = k, \qquad \text{где } k \text{ — константа.}$$

Разделив переменные: $$\frac{dq}{q} = \frac{kdp}{p},$$

проинтегрируем: $lnq = klnp + lnC$,

и избавившись от логарифмов, получим: $q = Cp^k$.

Итак, если функция спроса имеет вид $q = Cp^k$, где C произвольное положительное число, а k – отрицательное число (числа C и k определяются экономическим смыслом задачи), то при любой цене коэффициент эластичности спроса будет равен k.

4.1.3. Метод уменьшающегося остатка

Одним из наиболее популярных методов ускоренной амортизации, используемых в бухгалтерском учете, является метод уменьшающегося остатка (declining-balance method), который также называют методом начисления износа с сокращающейся балансовой стоимостью.

Обозначив, через x_n остаточную стоимость амортизируемого объекта на конец периода с номером n, опишем метод уменьшающегося остатка, уравнением

$$x_{n+1} = qx_n\ , \qquad (4.1.5)$$

с условиями

x_0 = *первоначальная стоимость* и x_N = *ликвидационная стоимость*.

Буквой q обозначен коэффициент определяющий изменение остаточной стоимости - коэффициент амортизации:

$$q = \sqrt[N]{\frac{x_N}{x_0}} \qquad (4.1.6)$$

Уравнение (4.1.5) описывает члены геометрической прогрессии, и, следовательно, изменение остаточной стоимости определяется формулой

$$x_n = x_0\, q^n. \qquad (4.1.7)$$

Задача 6

Пусть копировальный аппарат, приобретенный за *$3000* и имеющий ликвидационную стоимость *$50*, предположительно будет использоваться 8 лет, а амортизация будет производиться в конце каждого года.

Тогда, из формулы (4.1.6), коэффициент амортизации $q = \sqrt[8]{\frac{50}{3000}} = 0,6$.

То есть, предполагается, что к концу каждого года остается 60% от стоимости на начало года, или другими словами, стоимость аппарата ежегодно уменьшается на 40%. Соответственно, уравнение, связывающее остаточные стоимости амортизируемого объекта в соседние периоды, в данном случае имеет вид $x_{n+1} = 0,6x_n$.

Отсюда легко видеть, что к концу 1-го года остаточная стоимость копировального аппарата будет $x_1 = 0,6x_0 = 0,6 \cdot 3000 = 1800;$

к концу 2-го года $x_2 = 0,6x_1 = 0,6 \cdot 1800 = 1080;$

…

к концу 8-го года $x_8 = 0,6x_7 = (0,6)^8 x_0 = (0,6)^8 \cdot 3000 = 50,39.$

Небольшое отличие величины x_8 от ликвидационной стоимости *$50* объясняется погрешностями округления.

Замечание

Небольшая проблема имеет место, если предполагать, что ликвидационная стоимость равна нулю. Тогда из формулы (4.1.6) будет следовать, что вся стоимость должна быть амортизирована за 1 период. Для того чтобы избежать подобной ситуации необходимо договориться о том, что всегда имеет место ликвидационная стоимость, и это вполне согласуется с практикой. Возможно, достаточно считать, что ликвидационная стоимость не меньше, чем 5% от начальной стоимости актива.

4.1.4. Переход к дифференциальному уравнению

Теперь, в условиях задачи 5 попробуем ответить на вопрос: «Какой будет остаточная стоимость копировального аппарата к середине 1-го года?»

Можно рассуждать следующим образом: если за 1-й год амортизируется *$1200*, то за полгода должно амортизироваться *$600*. Но этот подход не соответствуют принципу ускоренной амортизации.

К решению этой задачи можно подойти и по другому: если за год списывается 40% стоимости, то за полгода должно быть списано 20%. К сожалению, и это не подходит, так как если списать два раза по 20%, то будет списано меньше, чем 40%: $0,8 \cdot 0,8 = 0,64$.

Достаточно разумное решение этой задачи можно получить, прибегнув к помощи дифференциальных уравнений. Перепишем уравнение (4.1.5) в виде

$$x_{n+1} - x_n = (q - 1)x_n \,, \qquad (4.1.5a)$$

и, для того чтобы получить значение остаточной стоимости в любой момент времени, введем независимую переменную t — напишем непрерывный аналог уравнения (4.1.5а):

$$x(t + \Delta t) - x(t) = q(\Delta t)\,x(t). \qquad (4.1.8)$$

При этом: $0 \le \Delta t \le 1$; $x(n) = x_n$; $q(0) = 0$; $x(n + 1) = x_{n+1}$; $q(1) = q - 1$.

Разделив уравнение (4.1.8) на Δt, и переходя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим дифференциальное уравнение

$\frac{dx}{dt} = ax(t)$ с условиями $x(0) = x_0$ и $x(1) = x_1 = qx_0$.

Разделив переменные: $\frac{dx}{x} = adt$, и проинтегрировав: $\ln x = at + \ln C$,

получим $x(t) = Ce^{at}$. Подставив вместо t нуль, получим, что $C = x_0$, затем, из условия $x(1) = qx_0$, получим, что $e^a = q$.

Итак, мы получили, что остаточная стоимость амортизируемого объекта при использовании метода уменьшающегося остатка задается функцией
$x(t) = x_0 q^t$. Очевидно, что функция, заданная формулой (4.1.7) является ее частным случаем.

Следовательно, в условиях задачи 5, функция $x(t) = 3000(0{,}6)^t$.
Поэтому, мы можем разумным образом определить остаточную стоимость копировального аппарата не только через полгода:

$$x(0{,}5) = 3000(0{,}6)^{0{,}5} = 2323{,}79;$$

но и на любой момент времени в течение срока эксплуатации. К примеру, в рамках предложенной модели, остаточная стоимость через 5 лет и 3 месяца будет положена равной $x(5{,}25) = 3000(0{,}6)^{5{,}25} = 205{,}31$.

4.1.5. Распространение информации

Логично предполагать, что скорость распространения информации в ограниченном сообществе пропорциональна количеству владеющих этой информацией, а также количеству тех до кого эта информация еще не дошла.

Поэтому, соответствующее уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(N - x(t)) \,. \qquad (4.1.9)$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности, $x(t)$ – количество владеющих этой информацией на момент времени t, N – размер сообщества.

Для того чтобы решить уравнение (4.1.9), разделим переменные:

$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt,$ и проинтегрируем.

Числовой пример.

Речь вождя племени, в которой он велел отменить коррупцию, слушали 0,5 тысяч человек. Через 1 час об этом знали 2 тысячи. Сколько человек будет знать об этом через 2 часа, если всего в племени 10 тысяч человек?

Итак, имеет место уравнение $\frac{dx}{dt} = kx(t)(10 - x(t)$.

Разделим переменные: $\frac{dx}{x(10-x)} = kdt,$

и проинтегрируем: $\int \frac{dx}{x(10-x)}$ = (*используем метод неопределенных коэффициентов для того чтобы разбить интеграл на два простейших интеграла*)

$= \int \frac{0,1`dx}{x} + \int \frac{0,1dx}{10-x} = 0,1(ln|x| - ln|10-x|) + lnC_1,$

$\int kdt = kt + lnC_2$.

Тогда, $ln\frac{x}{10-x} = 10kt + lnC$ и

$$\frac{x}{10-x} = Ce^{10kt}. \qquad (4.1.10)$$

Подставив в (4.1.10) начальные условия, получим

$$\frac{0,5}{10-0,5} = C \Rightarrow C = \frac{1}{19}, \quad \text{и} \quad \frac{2}{10-2} = \frac{1}{19}e^{10k} \Rightarrow e^{10k} = \frac{19}{4}.$$

Итак, число *x(t)* тех, до кого дошла информация к моменту времени *t* определяется равенством $\frac{x}{10-x} = \frac{1}{19}\left(\frac{19}{4}\right)^t$.

В частности, через 2 часа новость услышат:

$$\frac{x}{10-x} = \frac{1}{19}\left(\frac{19}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{19}{16} \Rightarrow 16x = 190 - 19x \Rightarrow 35x = 190,$$

примерно, 5 тысяч 429 человек.

4.1.6. Логистическая кривая

Уравнение вида (4.1.9) часто встречается при моделировании различных процессов. Его решение называют логистической кривой. В данном разделе мы рассмотрим еще один пример [119] на такие уравнения. Особенностью данного рассмотрения будет не совсем стандартный подход к интегрированию.

В одном из шотландских озер выращивается форель. При отсутствии вылова, размножение форели описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}1x(t)(1-0{,}01x(t)),\ \text{для } x > 0,\ \text{и } 0 \text{ для } x = 0. \qquad (4.1.10)$$

где $x(t)$ количество форели, в тысячах голов, на момент времени t.

Для того чтобы решить уравнение, разделим переменные: $\frac{dx}{x(1-0{,}01x)} = 0{,}1dt$. Далее, чтобы взять интеграл $\int \frac{dx}{x(1-0{,}01x)}$ разделим числитель и знаменатель на x^2, и введем замену $1/x = y$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x(1-0{,}01x)} = \int \frac{-dy}{(y-0{,}01)} = -ln|y-0{,}01| + C.$$

В результате получаем решение уравнения $-ln|1/x - 0{,}01| + C = 0{,}1t$ или $x(t) = \frac{1}{Ae^{-0{,}1t} + 0{,}01}$. Предположим, что в начальный момент времени в озере было 20 тысяч голов. Тогда постоянная интегрирования A равна $0{,}04$, а количество форели, выражаемое формулой $x(t) = \frac{100}{4e^{-0{,}1t} + 1}$ через длительный промежуток времени стабилизируется на числе 100 тысяч.

Теперь предположим, что предполагается вылавливать рыбу с постоянной скоростью 2,1.

Тогда будет иметь место уравнение $\frac{dx}{dt} = 0{,}1x(1-0{,}01x) - 2{,}1$.

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, вначале раскроем скобки в правой части, найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$0,1x - 0,001x^2 - 2,1 = 0$, и разложим квадратный трехчлен на множители:
$0,1x - 0,001x^2 - 2,1 = -0,001(x - 70)(x - 30)$.

В результате получим уравнение $\frac{dx}{dt} = -000,1(x-70)(x-30)$.

Для того чтобы использовать прием, который позволил нам проинтегрировать уравнение (4.1.10), сделаем замену переменной $z = x - 70$, и получим уравнение $\frac{dz}{dt} = -000,1z(z+40)$. Его мы решим также как и уравнение (4.1.10): разделим переменные, далее, разделим числитель и знаменатель на z^2, сделаем замену $1/z = y$, проинтегрируем и получим $y + 40 = Ce^{0,001t}$.

Вернувшись от y к z, а от z к x, имеем $x(t) = 70 + \frac{40}{Ce^{0,04t} - 1}$.

Рассмотрим два случая.

В 1-м случае предположим, что начальное поголовье содержит 20 тысяч голов. Тогда, соответствующее частное решение $x(t) = 70 + \frac{40}{0,2e^{0,04t} - 1}$. Так как знаменатель дроби непрерывен, при $t = 0$ отрицателен, а при больших значениях аргумента положителен, он в какой- то момент становится очень маленькой отрицательной величиной. То есть с какого-то момента времени значение поголовья отрицательно. Это означает, что при такой скорости вылова в какой-то момент времени форели в озере не останется.

Решив уравнение $0 = 70 + \frac{40}{0,2e^{0,04t} - 1}$, можно определить, что этот момент настанет при $t = 19,05$.

Во 2-м случае предположим, что $x(0) = 50$. Тогда $x(t) = 70 - \frac{40}{e^{0,04t} + 1}$.

Полученный результат говорит, что при указанных условиях количество форели со временем стабилизируется на числе 70 тысяч.

§4.2. Модель Домара, анализ роста ВВП на языке линейных дифференциальных уравнений первого порядка

4.2.1. *Линейные уравнения первого порядка* – это уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (4.2.1)$$

Введем обозначение $z = e^{\int p(x)dx}$.

Нетрудно проверить, что уравнение (4.2.1) можно переписать в виде

$$(yz)' z^{-1} = q(x). \qquad (4.2.1а)$$

Последовательно перебрасывая множители в правую часть (4.2.1а) и интегрируя, получим множество всех решений уравнения (4.2.1) – общее решение:

$$y(x) = z^{-1}\left(\int q(x)zdx + c\right) \qquad (4.2.2)$$

Из формулы (4.2.2) следует, что:

I. Функция z^{-1} в (4.2.2), является решением однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0. \qquad (4.2.3)$$

(*Для подтверждения, достаточно считать, что $c = 1$, $q(x) = 0$.*)

II. Слагаемое $z^{-1}\int q(x)zdx$ в формуле (4.2.2) является частным решением неоднородного уравнения (4.2.1). (*Достаточно положить $c = 0$.*)

III. Общее решение уравнения (4.2.1) является суммой общего решения однородного уравнения (4.2.2) и частного решения неоднородного уравнения (4.2.1). (*Это вытекает из утверждений I и II.*)

IV. Если правая часть уравнения (4.2.1) есть сумма нескольких функций:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \ldots + q_N(x),$$

то его решение есть функция

$$y(x) = z^{-1}\left(\int q_1(x)zdx + \int q_2(x)zdx + \ldots + \int q_N(x)zdx + c\right),$$

где $\int q_k(x)zdx$ является частным решением уравнения $y' + p(x)y = q_k(x)$.

<u>Пример 1</u>

Решить уравнение $y' + 2y = 3 + 5e^{3x}$.

Решение

Для этого уравнения $z = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. Следовательно, его можно записать в виде $(ye^{2x})' e^{-2x} = 3 + 5e^{3x}$.

Тогда, $(ye^{2x})' = 3e^{2x} + 5e^{5x}$, $ye^{2x} = 1{,}5e^{2x} + e^{5x} + C$.

Отсюда получаем, что общее решение определяется формулой $y = 1{,}5 + e^{3x} + Ce^{-2x}$, где C - произвольная постоянная.

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + xy = 4x \qquad (4.2.4)$$

и частное решение уравнения (4.2.4), которое удовлетворяет условию $y(0) = 1$.

Решение

В этом случае, $z = e^{\int xdx} = e^{x^2/2}$, и поэтому, уравнение (4.2.4) можно записать в виде $\left(ye^{x^2/2}\right)' e^{-x^2/2} = 4x$.

Умножив это уравнение на $e^{x^2/2}$, и проинтегрировав, получим

$$ye^{x^2/2} = C + 4e^{x^2/2}.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения задается формулой $y = Ce^{-x^2/2} + 4$, где C - произвольная постоянная.

Из начального условия: $1 = C + 4$. Отсюда, $C = -3$.

Соответственно, частное решение уравнения (3.7.4) удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$: $\quad y = -3e^{-x^2/2} + 4$.

4.2.2. Уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad . \qquad (4.2.5)$$

Оно не является линейным, но легко сводится к нему. Для этого нужно разделить уравнение (4.2.5) на y^m и в качестве неизвестной функции взять y^{1-m}.

В то же время уравнение Бернулли можно решить, воспользовавшись тем же преобразованием, что и при решении линейного уравнения.

Для этого перепишем его в виде $(ye^{\int p(x)dx})' e^{-\int p(x)dx} = q(x)y^m$,

и введя обозначение $ye^{\int p(x)dx} = u$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $(u)' e^{-\int p(x)dx} = q(x)u^m e^{-m\int p(x)dx}$.

<u>Пример 3</u>

Решим уравнение $y' + 2y = e^x y^2$.

Сразу отметим, что $y = 0$ – решение. Далее, предполагаем, что y не равен (тождественно) нулю.

Поскольку это уравнение Бернулли, его можно привести к линейному, разделив y^2 :

$$y' + 2y = e^x y^2 \Leftrightarrow y'/y^2 + 2/y = e^x,$$

и введя новую функцию $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y'/y^2$:

$$y'/y^2 + 2/y = e^x \Leftrightarrow z' - 2z = -e^x.$$

Последнее уравнение является линейным. Его решение можно найти по формуле (4.2.2). Затем необходимо сделать обратную замену.

Более быстро мы найдем ответ, решая уравнение непосредственно.

Так как $e^{\int p(x)dx} = e^{2x+c}$, исходное уравнение можно переписать следующим образом:

$$(ye^{2x})' e^{-2x} = e^x y^2 \Leftrightarrow (ye^{2x})' / e^{4x} y^2 = e^{-x} \Leftrightarrow u'/u^2 = e^{-x}, \quad \text{где} \quad u = e^{2x} y.$$

Проинтегрировав, получим $-1/u = -e^{-x} - C$ или $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$.

Дописав решение $y = 0$, получим полное решение.

<u>Пример 4</u>

Экономическая модель [119] предполагает, что изменение капитала на душу населения $k(t)$ определяется уравнением $k' = sy(t) - nk(t)$,

где $y(t)$ – ВВП на душу населения; s – норма сбережения; n – норма роста рабочей силы.

Пусть $y(t) = 2k^{0,2}$; $s = 0,2$; $n = 0,05$; $k(0) = 1$.
Тогда имеет место уравнение Бернулли $k' + 0,05k = 0,4k^{0,2}$.

Свернем левую часть: $(ke^{0,05t})'e^{-0,05t} = 0,4k^{0,2}$, и обозначив $ze^{0,05t} = k$, получим уравнение с разделяющимися переменными $z' = 0,4z^{0,2}e^{0,04t}$.

Разделим переменные: $z^{-0,2}dz = 0,4e^{0,04t}dt$, и проинтегрировав, получим $z^{0,8} = 8e^{0,04t} + A$. Подставим вместо z его значение: $k^{0,8} = 8 + Ae^{-0,04t}$, и воспользовавшись начальным условием $k(0) = 1$, получим $1 = 8 + A$.
Отсюда, $A = -7$ и $k = (8 - 7e^{-0,04t})^{1,25}$.

Полученный результат позволяет утверждать, что если модель верна и условия в течение длительного времени не изменятся, то величина капитала на душу населения $k(t)$ стабилизируется на уровне $8^{1,25} = 13,4543$.

4.2.3. Модель Эванса предполагает, что разность между объемами спроса (D) и предложения (S) пропорциональна скорости изменения цены товара (p). Это условие на языке дифференциальных уравнений запишется так:

$$p' = k(D - S). \tag{4.2.6}$$

Изучим динамику изменения цены товара, предполагая, что функция спроса имеет вид $D = 20 - 1,2p$, функция предложения $S = 1,3p - 2$, в начальный момент времени цена \$7,2, через месяц \$8.

Подставив в (4.2.6) выражения для функции спроса и предложения, получим

$$p' = k[(20 - 1,2p) - (1,3p - 2)].$$

Раскрыв скобки и перегруппировав, получим линейное дифференциальное уравнение $p' + 2,5kp = 22k$, которое можно переписать в виде

$$[pe^{2,5kx}]'e^{-2,5kx} = 22k. \text{ } (x \text{ – число месяцев})$$

Умножим это уравнение на $e^{2,5kx}$: $[pe^{2,5kx}]' = 22ke^{2,5kx}$,

проинтегрируем: $pe^{2,5kx} = 8,8e^{2,5kx} + C$,

и умножим результат на $e^{-2,5kx}$: $p = (8,8 + C)e^{-2,5kx}$.

Осталось определить значения k и C. Для этого, вначале воспользуемся 1-м условием: $p(0) = 7,2 \Rightarrow 7,2 = (8,8 + C)e^0 \Rightarrow C = -1,6$.

Далее, из второго условия, $p(1) = 8$, следует:

$8 = (8,8 - 1,6)e^{-2,5k} \Rightarrow e^{-2,5k} = 0,5.$

Следовательно, изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, определяется функцией $p = 8,8 - 1,6(0,5)^x$.

В частности, если условия не будут меняться, то через 5 месяцев цена будет равна $p(5) = 8,8 - 1,6(0,5)^5 = 8,75$, а через много-много месяцев она стабилизируется на числе $8,8$.

4.2.4. Модель Домара

Пусть $D(x)$ это величина национального долга, $I(x)$ – величина национального дохода, x – время, измеренное в годах. Тогда, согласно модели Домара (*Domar debt model*), скорость изменения как $D(x)$, так и пропорциональна $I(x)$, то есть $D' = aI(x)$ и $I' = bI(x)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} I' = 0,8I + 5, \\ D' = -0,02I + 0,2x, \end{cases} \qquad (4.2.7)$$

с начальными условиями $I(0) = 100$; $D(0) = 20$, иллюстрирующую обобщенный вариант модели Домара.

К счастью, система (4.2.7) является вырожденной, и ее решение можно найти, последовательно проинтегрировав, входящие в нее уравнения.

Для решения 1-го уравнения запишем его в виде $[Ie^{-0,08x}]'e^{0,08x} = 5,$

умножим на $e^{-0,08kx}$: $[Ie^{-0,08x}]' = 5e^{-0,08x},$

проинтегрируем: $Ie^{-0,08x} = 62,5e^{-0,08x} + C,$

и умножим результат на $e^{0,08x}$: $I = 62,5 + Ce^{0,08x}$.

Начальное условие $I(0) = 100$ позволяет получить соответствующее частное решение

$$I = 62,5 + 37,5e^{0,08x}. \qquad (4.2.8)$$

Подставив значение функции (4.2.8) во 2-ое уравнение системы (4.2.7) получим уравнение $D' = -0,02(62,5 + 37,5e^{0,08x}) + 0,2x.$

Отсюда, и из начального условия $D(0) = 20$, получаем

$$D(x) = -1{,}25x - 9{,}375e^{0{,}08x} + 29{,}375 + 0{,}1x^2 .$$

Полученное решение позволяет установить, что через 5 лет величина государственного дохода $I(5)$ составит *118,44*, а величина госдолга

$$D(5) = -1{,}25\cdot 5 - 9{,}375e^{0{,}08\cdot 5} + 29{,}375 + 0{,}1\cdot 5^2 = 11{,}64.$$

4.2.5. Рост валового внутреннего продукта

Валовой внутренний продукт — ВВП — страны есть стоимость всех товаров и услуг, произведенных в стране за год. Пожалуй, изменение его величины наилучшим образом отражает состояние экономики. Не удивительно, что разработка моделей, описывающих изменение ВВП, является весьма популярной в среде экономистов задачей. Одна из таких моделей предлагается вашему вниманию.

Упрощенная экономическая модель предполагает, что ВВП страны (Y) есть сумма инвестиций (I) и потребления (C):

$$Y = I + C.$$

Функция потребления C имеет постоянную часть – потребление товаров первой необходимости (A). Оставшаяся часть ВВП ($Y - A$) распределяется между инвестициями ($I = b(Y - A)$) и потреблением предметов роскоши ($(1 - b)(Y - A)$):

$$Y = b(Y - A) + A + (1 - b)(Y - A). \qquad (4.2.9)$$

Логично предположить, что ВВП страны пропорционален объему капитала (производственных помещений, станков, оборудования, …) имеющегося в стране:

$$Y = aK. \qquad (4.2.10)$$

Как известно, инвестиции есть изменение объема капитала.

Поэтому, многие ученые-экономисты считают, что функцию инвестиций уместно записывать в виде $I = K'$, где K' - производная от функции капитала по времени.

Тогда, из (4.2.10) получаем $I = \frac{1}{a}Y'$,

и как следствие, из разложения (4.2.9), дифференциальное уравнение

$$b(Y - A) = \frac{1}{a} Y'.$$

Оно является линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$Y' - abY = -abA. \qquad (4.2.11)$$

Проинтегрировав уравнение (4.2.11), получим $Y = A + Ce^{abt}$.

Обозначив через Y_0 значение ВВП в начальный момент времени и выразив C через Y_0, получим, что величина валового внутреннего продукта в момент времени t есть число $Y = A + (Y_0 - A)e^{abt}$.

Вид функции Y позволяет утверждать, что: чем выше отдача капитала, выраженная коэффициентом a, и склонность к инвестированию, выраженная коэффициентом b, тем быстрее растет ВВП.

Кроме того, чем лучше стартовые условия (величина $Y_0 - A$), тем больше будущее ВВП.

§4.3. Модель рыночного равновесия и системы линейных дифференциальных уравнений

4.3.1. Жили, были два великих ученых Леонард Эйлер (1707 - 1783) и Жан Лерон Даламбер (1717 - 1783). Оба отличались великим умом, сделали множество открытий, и написали большое количество научных трудов, над которыми нынче корпят студенты всех стран мира.

Однажды, один из них придумал метод решения систем линейных дифференциальных уравнений. Услышав об этом, другой сказал: «Подумаешь. Я могу придумать не хуже». И придумал.

Возможно, дело обстояло несколько иначе, и дело в том, что почта тогда была не ахти, а *e-mail* тогда еще не изобрели. Но как бы там не было, но с тех пор бедным студентам приходится изучать 2 метода: метод Эйлера, основанный на использовании собственных чисел матрицы коэффициентов системы и метод интегрируемых комбинаций Даламбера.

Но жизнь не стоит на месте. Неумолимый научно-технический прогресс все увеличивает и увеличивает объем информации, который должен быть усвоен. И как результат, все чаще и чаще приходится сталкиваться с катастрофической нехваткой времени и необходимостью выбора только одного метода. Можно по-разному решать возникшую дилемму, но на наш взгляд, лучший выход из этой ситуации — объединить методы. К счастью, потенциал заложенный в исходных составляющих настолько велик, что возникает эффект синергии: объединенный метод проще, чем исходные.

Описанию этого метода посвящен этот параграф.

Будут рассмотрены только линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, но следует отметить, что распространение результатов на более высокие порядки не представляет особых сложностей.

4.3.2. Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, это система вида

$$\begin{cases} y' = ay + bz + f(x), \\ z' = cy + dz + g(x), \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

где коэффициенты a, b, c, d – постоянные числа, а f и g – функции.

Характеристическое уравнение системы (4.3.1) это уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0, \qquad (4.3.2)$$

где функция $\Delta(\lambda)$ определяется коэффициентами системы (4.3.1) следующим образом: $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - c\cdot b.$

Корни уравнения (4.3.2) называются характеристическими числами системы (4.3.1).

Пусть p и q характеристические числа системы. Тогда, для того чтобы решить систему вычтем функцию py от левой и правой частей 1-го уравнения системы (1) и pz от обеих частей 2-го уравнения:

$$\begin{cases} y' - py = (a - p)y + bz + f(x), \\ z' - py = cy + (d - p)z + g(x). \end{cases} \qquad (4.3.3)$$

Так как число p является характеристическим, определитель $\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}$ равен нулю, а это значит, что строчки определителя пропорциональны. Пусть коэффициент пропорциональности равен k.

Свернем левые части уравнений, умножим 2-ое уравнение на k

$$\begin{cases} (ye^{-px})'e^{px} = (a-p)y + bz + f(x), \\ k(ze^{-px})'e^{px} = kcy + k(d-p)z + kg(x), \end{cases}$$

и вычтем второе уравнение из первого.

Тогда

$$[(y-kz)e^{-px}]'e^{px} = f(x) - kg(x). \tag{4.3.4}$$

Проинтегрировав уравнение (4.3.4), получим

$$y - kz = \{\int [f(x) - kg(x)]e^{-px}dx + C_1\}e^{px}. \tag{4.3.5}$$

Повторим процедуру, взяв q вместо p, и получим

$$y - mz = \{\int [f(x) - mg(x))]e^{-qx}dx + C_2\}e^{qx}. \tag{4.3.6}$$

Рассмотрим равенства (4.3.5) и (4.3.6) как систему относительно неизвестных y и z, и решив ее, получим решение системы (4.3.1).

Пример 1

Предположим, что:

1) скорость изменения цены товара (p) пропорциональна разности между объемами спроса (D) и предложения (S);

2) функция спроса есть линейная функция от цены;

3) скорость изменения объема предложения пропорционально цене.

При этом:

4) изменение цены за неделю на \$0,1 уменьшает избыточный спрос на 10 единиц;

5) при цене \$2 объем спроса 380, при цене \$5 объем спроса 200;

6) при цене \$1 изменение объема предложения за неделю равно 5.

Определите динамику изменения цены, объема спроса и объема предложения, зная, что в начальный момент цена \$4, объем спроса равен объему предложения.

Условие 1), запишется как $p' = k(D - S)$. Из условия 4) получаем, что $0,1 = k10$. Следовательно, $k = 0,01$.

Записав функцию спроса в виде $D = a - bp$, воспользуемся условиями 5), чтобы определить значения коэффициентов a и b: $\begin{cases} 380 = a - b2, \\ 200 = a - b5. \end{cases}$

Отсюда, $a = 500, b = 60$.

Условие 3), означает, что $S' = mp$. Из условия 6) следует $5 = m \cdot 1$.

В результате, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p' = 0,01[(500 - 60p) - S], \\ S' = 5p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p' = -0,6p - 0,01S + 5, \\ S' = 5p. \end{cases} \qquad (4.3.12)$$

Из 1-го уравнения системы (4.3.12) воспользовавшись начальными условиями $p'(0)=0; p(0) = 4$ получим $S(0) = 260$.

Характеристическое уравнение системы (4.3.12) это уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -0,6 - \lambda & -0,01 \\ 5 & -\lambda \end{vmatrix} = (-0,6 - \lambda)(- \lambda) - (-0,01) \cdot 5 = 0.$$

Его корни $\{-0,1; -0,5\}$.

Воспользовавшись первым из них, перепишем систему (4.3.12) в виде

$$\begin{cases} p' + 0,1p = -0,5p - 0,01S + 5, \\ S' + 0,1S = 5p + 0,1S, \end{cases}$$

свернем левые части

$$\begin{cases} (pe^{0,1x})' e^{-0,1x} = -0,5p - 0,01S + 5, \\ (Se^{0,1x})' e^{-0,1x} = 5p + 0,1S, \end{cases}$$

и, умножив 1-ое уравнение на 10, добавим ко 2-му: $[(10p + S)e^{0,1x}]' e^{-0,1x} = 50.$

Последовательно перебрасывая множители в правую часть, и интегрируя, получим $10p + S = 500 + C_1 e^{-0,1x}$.

Теперь, воспользуемся начальными условиями и получим 1-ую комбинацию решений $10p + S = 500 - 200e^{-0,1x}$.

Повторим процедуру, взяв второе характеристическое число:

$$\begin{cases} p' + 0{,}5p = -0{,}1p - 0{,}01S + 5, \\ \quad S' + 0{,}5S = 5p + 0{,}5S, \end{cases} \quad \text{затем} \quad \begin{cases} (pe^{0{,}5x})'e^{-0{,}5x} = -0{,}1p - 0{,}01S + 5, \\ \quad (Se^{0{,}5x})'e^{-0{,}5x} = 5p + 0{,}5S. \end{cases}$$

Прибавим к умноженному на *50* первому уравнению второе: $[(50p + S)e^{0{,}5x}]'e^{-0{,}5x} = 250$, проинтегрируем, и, воспользовавшись начальными условиями, получим 2-ую комбинацию решений $50p + S = 500 - 40e^{-0{,}5x}$.

Для завершения решения системы дифференциальных уравнений, осталось решить алгебраическую систему, определяемую комбинациями решений:

$$\begin{cases} 10p + S = 500 - 200e^{-0{,}1x}, \\ 50p + S = 500 - 40e^{-0{,}1x}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что решение системы (4.3.12) есть пара функций

$$\begin{cases} \qquad p = 5e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}5x}, \\ S = 500 - 250e^{-0{,}1x} + 10e^{-0{,}5x}. \end{cases}$$

Тогда объем спроса будет определяться функцией $D = 500 - 300e^{-0{,}1x} - 60e^{-0{,}5x}$.

4.3.3. Пример 2

Пусть $v(t)$ – это цена товара А, $w(t)$ – цена товара В в момент времени t, а изменение цен, описывается системой

$$\begin{cases} v' = -0{,}3v + 0{,}25w + 3t^{-0{,}5}e^{-0{,}1t}, & v(0) = 10, \\ w' = -0{,}16v + 0{,}1w, & w(0) = 12. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Определим значения функций $v(t)$ и $w(t)$.

Для того чтобы решить задачу (4.3.13), вначале составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -0{,}3 - \lambda & 0{,}25 \\ -0{,}16 & 0{,}1 - \lambda \end{vmatrix} = (-0{,}3 - \lambda)(0{,}1 - \lambda) - (-0{,}16) \cdot 0{,}25 = 0.$$

Полученное уравнение имеет два совпадающих корня $\{-0{,}1; -0{,}1\}$.

Используем найденный корень для того чтобы переписать систему:

$$\begin{cases} v' - (-0{,}1v) = -0{,}2v + 0{,}25w + 3t^{-0{,}5}e^{-0{,}1t}, \\ w' - (-0{,}1w) = -0{,}16v + 0{,}2w. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Прибавив к первому уравнению системы (4.3.14) второе, умноженное на (*-1,25*), получим линейное дифференциальное уравнение

$(v-1,25w)' + 0,1(v-1,25w) = 3t^{-0,5}e^{-0,1t}$ относительно функции $v(t) - 1,25w(t)$.

Преобразуем левую часть уравнения: $([v-1,25w]e^{0,1t})' e^{-0,1t} = 3t^{-0,5}e^{-0,1t}$,
и последовательно перебрасывая множители в правую часть и интегрируя, получим $v(t) - 1,25w(t) = (6t^{0,5} + C_1)e^{-0,1t}$.

Воспользовавшись начальными условиями $v(0) = 10$ и $w(0) = 12$, получим, что $10 - 1,25 \cdot 12 = C_1 \Rightarrow C_1 = -5$.

Поэтому,

$$v(t) - 1,25w(t) = (6t^{0,5} - 5)e^{-0,1t}. \qquad (4.3.15)$$

Как уже было отмечено ранее, так как корни характеристического уравнения равны друг другу, комбинация решений $v(t) - 1,25w(t)$ содержится в правых частях уравнений системы (4.3.14). Поэтому, второе уравнение системы (4.3.14) можно записать в виде $w' + 0,1w = -0,16[(6t^{0,5} - 5)e^{-0,1t}]$.

Решение этого уравнения $w(t) = (-0,64t^{1,5} + 0,8t + C_2)e^{-0,1t}$.

Начальное условие $w(0) = 12$ позволяет выделить частное решение $w(t) = (-0,64t^{1,5} + 0,8t + 12)e^{-0,1t}$. Подставив значение $w(t)$ в (4.3.15):

$$v(t) - 1,25[(-0,64t^{1,5} + 0,8t + 12)e^{-0,1t}] = (6t^{0,5} - 5)e^{-0,1t},$$

определим функцию $v(t) = [-0,8t^{1,5} + t + 6t^{0,5} + 10]\, e^{-0,1t}$,
и тем самым закончим решение задачи (4.3.13).

§4.4. Моделирование процесса изменения цены товара при помощи линейных дифференциальных уравнений высоких порядков

4.4.1. Решение линейных дифференциальных уравнений путем разложения

Алгебраическое уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (4.4.1)$$

можно решить, заметив, что

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1).$$

Точно также можно поступить и с дифференциальным уравнением

$$y'' - 3y' + 2y = 20e^{2x}: \qquad (4.4.2)$$

$$y'' - 3y' + 2y = y'' - 2y' - y' + 2y = (y' - 2y)' - (y' - 2y).$$

Теперь обозначим $y' - 2y$ через z, и получим представление уравнения (4.4.2) в виде последовательности 2-х уравнений первого порядка:

$$z' - z = 20e^{2x}; \qquad (4.4.2.a)$$

$$y' - 2y = z. \qquad (4.4.2.b)$$

Решим уравнение (4.4.2.a): $z = 20e^{2x} + Ce^{x}$,

подставим найденное значение в (4.4.2.b): $y' - 2y = 20e^{2x} + Ce^{x}$,

и проинтегрировав, получим общее решение уравнения (4.4.2):

$$y = 20xe^{2x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}.$$

Известно, что для того чтобы суметь разложить квадратный трехчлен на множители — быть «ясновидящим» при преобразовании уравнений вида (4.4.1) — достаточно знать формулу: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

(x_1 и x_2 — корни соответствующего квадратного уравнения.)

4.4.2. Исходя из вышеизложенного, несложно прийти к выводу, что нечто подобное должно иметь место и для линейных дифференциальных уравнений.

Об этом мы будем говорить далее.

Теорема 1

Для того чтобы решить методом «Цепочка» уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \qquad (4.4.3)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные коэффициенты, $f(x)$ – заданная функция, достаточно разложить его в цепочку (последовательность) линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z_1' - k_1 z_1 = f(x), \qquad (4.4.3.0)$$

$$z_2' - k_2 z_2 = z_1, \qquad (4.4.3.1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.4.3.2)$$

$$z_{n-1}' - k_{n-1} z_{n-1} = z_{n-2}, \qquad (4.4.3.n\text{-}2)$$

$$y' - k_n y = z_{n-1}, \qquad (4.4.3.n\text{-}1)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ являются корнями характеристического уравнения

$$k^{n} + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0.$$

Для доказательства Теоремы 1 достаточно взять значение z_{n-1} из уравнения (4.4.3.n-1), затем подставить в (4.4.3.n-2) и выразить z_{n-2} через y и его производные. Полученное выражение вставить в (4.4.3.n-3) и так далее. На последнем шаге заменить z_1 в уравнении (4.4.3.0) на его представление через y и его производные, и на основании теоремы Виета убедиться в справедливости Теоремы 1.

Отметим, что в отличие от классического метода, метод решения использующий Цепочку не зависит от характера корней характеристического уравнения: ему все равно — являются ли корни различными или кратными.

Пример 1

Изучим динамику изменения цены товара, предполагая, что:

в каждый момент времени на рынке объем спроса (D) равен объему предложения (S);

функция спроса имеет вид $D = 152 - 0{,}36p - 1{,}75\,p' - p''$;

функция предложения $S = 0{,}4p - 6e^{-0{,}8t}$ (t – *число месяцев*);

в начальный момент времени цена $250, а скорость ее изменения $3 в месяц.

Условие равновесия $D = S$ определяет дифференциальное уравнение $152 - 0{,}36p - 1{,}75\,p' - p'' = 0{,}4p - 6e^{-0{,}8t}$, которое можно записать в стандартном виде

$$p'' + 1{,}75\,p' + 0{,}76p = 152 + 6e^{-0{,}8t}. \qquad (4.4.4)$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1{,}75k + 0{,}76 = 0$ имеет корни ($-0{,}95$) и ($-0{,}8$). Воспользуемся ими и разложим уравнение (4.4.4) в цепочку

$$z' + 0{,}95z = 152 + 6e^{-0{,}8t}, \qquad (4.4.5)$$

$$p' + 0{,}8p = z. \qquad (4.4.6)$$

Уравнение (4.4.5) можно переписать в виде

$$[ze^{0{,}95t}]'e^{-0{,}95t} = 152 + 6e^{-0{,}8t}.$$

Умножим это уравнение на $e^{0{,}95t}$, проинтегрируем:

$$ze^{0{,}95t} = 160e^{0{,}95t} + 40e^{0{,}15t} + C,$$

и умножим результат на $e^{-0,95t}$: $\quad z = 160 + 40e^{-0,8t} + Ce^{-0,95t}$.

Здесь можно определить значение C. Для этого, воспользуемся уравнением (4.4.6) и начальными условиями: $p(0) = 250$ и $p'(0) = 3$:

$z(0) = 3 + 0,8 \cdot 250 = 203$. Отсюда следует, что $C = 3$, а уравнение (4.4.6) имеет вид

$p' + 0,8p = 160 + 40e^{-0,8t} + 3e^{-0,95t}$.

Его можно записать в виде $\quad [pe^{0,8t}]'e^{-0,8t} = 160 + 40e^{-0,8t} + 3e^{-0,95t}$,

и, последовательно, умножив $e^{0,8t}$, проинтегрировав и умножив на $e^{-0,8t}$, получить решение $\quad p = 200 + 40te^{-0,8t} - 20e^{-0,95t} + C_1e^{-0,8t}$.

Осталось определить значение C_1:

$p(0) = 250 \;\Rightarrow\; 250 = 200 + 0 - 20 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 70$.

Следовательно, изменение цены на этом рынке определяется функцией

$p = 200 + 40te^{-0,8t} - 20e^{-0,95t} + 70e^{-0,8t}$.

В частности, если условия долго не будут меняться, то цена стабилизируется на уровне *\$200*.

§4.5. Дискретные и непрерывные модели экономических процессов

К сожаленью, сложилась плохая традиция — рассматривать разностные уравнения и дифференциальные уравнения как отдельные, независимые друг от друга, курса. В каком-то смысле, эта традиция проявилась и при написании данной работы — вначале обсуждаются разностные уравнения, а потом дифференциальные. Но это не совсем правильный подход, и для того чтобы показать тесную, органическую связь между этими уравнениями закончим главу параграфом, иллюстрирующим эту связь.

4.5.1. Непрерывное начисление интереса

Вложив 1 рубль на 1 год под 24% интереса, в конце года получим $1(1 + 0,24 \cdot 1) = 1,24$ рубля.

Если же начисление интереса будет производиться по:

полугодиям, то $(1 + 0,24 \cdot (1/2))^2 = 1,2544$ рубля;

кварталам, то $(1 + 0,24 \cdot (1/4))^4 = 1,2625$ рубля;

месяцам, то $(1 + 0{,}24\cdot(1/12))^{12} = 1{,}2682$ рубля.

Полученная последовательность чисел порождает ряд вопросов.

В их числе:

А. *Будет ли эта последовательность продолжать возрастать при увеличении количества начислений производимых за 1 год?*

В. *Можно ли вложив 5 рублей под 24% интереса, и произведя большое количество начислений интереса, получить в конце года 10 рублей?*

Для ответа на вопрос А покажем, что производная функции $f(x)=\left(1+\frac{r}{x}\right)^x$ положительна. Для этого продифференцируем функцию *f(x),* предварительно взяв ее логарифм $ln\, f(x)=xln\left(1+\frac{r}{x}\right)$.

Тогда $\frac{f'(x)}{f(x)}=ln\left(1+\frac{r}{x}\right)+x\left(-\frac{r}{x^2}\right)/\left(1+\frac{r}{x}\right)=ln\left(1+\frac{r}{x}\right)-\frac{r}{x+r}$.

Так как функция $ln(1+t)$ при малых значениях t эквивалентна t , получаем, что выражение $\frac{f'(x)}{f(x)}=ln\left(1+\frac{r}{x}\right)-\frac{r}{x+r}$ равносильно выражению $\frac{r}{x}-\frac{r}{x+r}$.

А так как это выражение, как и сама функция *f(x)* положительны, то и функция $f'(x)$ положительна. Следовательно, функция *f(x)* является возрастающей при положительных значениях r и x.

Для того чтобы ответить на вопрос В, рассмотрим функцию $A(x)=P\left(1+\frac{r}{x}\right)^{xt}$. Из ответа на вопрос А, следует, что эта функция растет с ростом x. Поэтому, устремив x к бесконечности и воспользовавшись 2-м замечательным пределом, получаем, что начисляя интерес в течение периода времени t бесконечно много раз, то есть при непрерывном начислении интереса при ставке r на исходную величину P, в конце периода получим максимально возможную сумму: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{xt}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/r}\right)^{x/r}\right)^{rt}= Pe^{rt}$.

В частности, если вложить 5 рублей под 24% интереса, максимум, который можно получить за 1 год, равен $5e^{0,24} = 5\cdot 1,2712 = 6,356$.

К функции Pe^{rt} можно прийти и другим путем – через дифференциальное уравнение. Для этого, перепишем формулу начисления простого интереса $A = P + Prt$ в виде $P(t + \Delta t) = P(t) + P(t)r\Delta t$ (где $P(t)$ величина счета в момент времени t), а затем в виде $\dfrac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = P(t)r$.

Отсюда, переходя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим уравнение

$$P' = Pr\,. \qquad (4.5.1)$$

Уравнение (4.5.1) называется дифференциальным и прямой подстановкой легко убедиться в том, что его решением является функция $P(0)e^{rt}$.

4.5.2. Линейные уравнения первого порядка

Для того чтобы подчеркнуть единую природу линейных разностных и дифференциальных уравнений проведем процесс получения решения этих уравнений одновременно.

Линейным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами a и $b_к$ называется уравнение

$$x_n - ax_{n-1} = b_n\,, \qquad (4.5.2)$$

где $x_к$ – значение исследуемой величины в k-тый период.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y' - ay = b(x)\,, \qquad (4.5.2a)$$

где $y(x)$ – значение исследуемой величины в момент x, коэффициенты a и $b(x)$ – заданы.

Разделим уравнение (4.5.2) на a^n: $a^{-n} x_n - a^{-(n-1)} x_{n-1} = b_n a^{-n}$.
и обозначив $a^{-к} x_к$ через $z_к$ получим, что

$$z_n - z_{n-1} = b_n a^{-n}. \qquad (4.5.3)$$

Разделим уравнение (4.5.2а) *на e^{ax}:*

$$y' e^{-ax} - aye^{-ax} = b(x)e^{-ax}\,,$$

и обозначив ye^{-ax} *через* z *получим, что*

$$z' = b(x)e^{-ax}. \qquad (4.5.3a)$$

Так как

$$z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \ldots + (z_2 - z_1) + (z_1 - z_0),$$

в силу уравнения (4.5.3), получаем

$$z_n - z_0 = b_n a^{-n} + b_{n-1} a^{-n+1} + \ldots + b_1 a^{-1}. \qquad (4.5.4)$$

Проинтегрируем уравнение (4.5.3a) и получим

$$z = \int b(x)e^{-ax}dx + C. \qquad (4.5.4a)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (4.5.4) на a^n, получим искомую формулу:

$$x_n = x_0 a^n + b_n + b_{n-1} a + \ldots + b_1 a^{n-1}. \qquad (4.5.5)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (4.5.4a) на e^{ax}, *получим искомую формулу:*

$$y = (\int b(x)e^{-ax}dx + C)e^{ax}. \qquad (4.5.5a)$$

Формула (4.5.5) примет вид

$$x_n = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} a^k + \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k} a^k, \quad \text{если } b_k = g_k + h_k \text{ для всех } k, \qquad (4.5.6)$$

и в частности,

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a - 1} + h\frac{a^n - c^n}{a - c}, \quad \text{если } b_k = g + hc^{k-1}. \qquad (4.5.7)$$

Отметим, что выражение $x_0 a^n$ называется общим решением однородного уравнения $x_n - ax_{n-1} = 0$, а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

Формула (4.5.5a) примет вид

$$y = (\int [g(x) + h(x)]e^{-ax}dx + C)e^{ax}, \quad \textit{если } b(x) = g(x) + h(x) \textit{ для всех } x; \qquad (4.5.6a)$$

и в частности,

$$y = -\frac{g}{a} + \frac{h}{c - a}e^{cx} + Ce^{ax}, \quad \textit{если } b(x) = g + he^{cx}. \qquad (4.5.7a)$$

Отметим, что выражение Ce^{ax} называется общим решением однородного уравнения $y' - ay = 0$, а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

Задача 1 (Разностная (дискретная) модель)

Со счета содержащего 20 000 евро в конце каждого квартала снимают по 1000 евро. Сколько денег останется на счете через 5 лет, если ставка интереса 8%?

Эту задачу очень легко перевести на язык математики, используя разностные уравнения.

Пусть x_n – это количество денег на счете в конце квартала с номером n. Тогда имеет место уравнение

$$x_n = (1 + 0{,}08\cdot(1/4))\, x_{n-1} - 1000, \qquad (4.5.8)$$

с начальным условием $x_0 = 20\,000$.

Поэтому, из формулы (4.5.7),

$$x_{20} = (1+0{,}02)^{20}\cdot 20000 - 1000\frac{(1+0{,}02)^{20}-1}{0{,}02} = 5422.$$

Задача 2 (Дифференциальная (непрерывная) модель)

Стоимость квартиры ежегодно уменьшается на 4000 евро за счет износа и увеличивается на 8% в год за счет инфляции. Сколько будет стоить квартира через 5 лет, если в начальный момент времени она стоила 20 000 евро?

Эту задачу, также как и задачу 1, легко решить, используя разностные уравнения:

Пусть y_n – это стоимость квартиры в конце периода длительностью t и номером n. Тогда имеет место уравнение

$$y_n = (1 + 0{,}08\cdot t)\, y_{n-1} - 4000\cdot t, \qquad (4.5.9)$$

с начальным условием

$$y_0 = 20\,000.$$

В частности, если период это квартал, то имеет место уравнение (4.5.8).

Но, будет более корректно, предполагать, что износ и инфляция происходят непрерывно.

Поэтому, переписав уравнение (4.5.9) в виде

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{t} = 0{,}08y_{n-1} - 4000 \ ,$$

и устремив t к нулю, приходим к дифференциальному уравнению

$$y' = 0{,}08y - 4000. \qquad (4.5.10)$$

Общее решение уравнения (4.5.10), по формуле (4.5.7а), $y = Ce^{0,08t} + 50\,000.$

Воспользовавшись начальным условием, получим

$20000 = C + 50000$ и $C = -30000.$

Следовательно, изменение стоимости квартиры описывается функцией

$y = -30000e^{0,08t} + 50\,000.$

Отсюда, если предположения, которые легли в основу нашей модели, верны, то через 5 лет квартира будет стоить $y(5) = -30000e^{0,4} + 50\,000 = 5245$ евро.

4.5.3. Рост валового внутреннего продукта

Валовой внутренний продукт — ВВП — страны есть стоимость всех товаров и услуг, произведенных в стране за год. Пожалуй, изменение его величины наилучшим образом отражает состояние экономики. Недаром, президент России В.В. Путин требует от правительства удвоить ВВП, а Китай по праву гордится тем, что в 21 веке ВВП страны ежегодно вырастает более чем на 10%.

Не удивительно, что разработка моделей, описывающих изменение ВВП, является весьма популярной в среде экономистов задачей. Одна из таких моделей предлагается вашему вниманию.

Упрощенная экономическая модель предполагает, что ВВП страны (Y) есть сумма инвестиций (I) и потребления (C): $Y = I + C.$

Функция потребления C имеет постоянную часть – потребление товаров первой необходимости (A). Оставшаяся часть ВВП ($Y - A$) распределяется между инвестициями ($I = b(Y - A)$) и потреблением предметов роскоши ($(1 - b)(Y - A)$):

$$Y = A + b(Y - A) + (1 - b)(Y - A). \qquad (4.5.11)$$

Логично предположить, что ВВП страны пропорционален объему капитала (производственных помещений, станков, оборудования, …) имеющегося в стране:

$$Y = aK. \qquad (4.5.12)$$

А как известно, инвестиции есть изменение объема капитала.

Далее будут представлены два варианта модели. Первый – на основе разностных уравнений, второй – дифференциальных.

Разностная (дискретная) модель.

Считаем, что величина инвестиций в периоде с номером n (I_n), есть разность между объемом капитала в периоде n (K_n) и объемом капитала в предыдущем периоде (K_{n-1}): $I_n = K_n - K_{n-1}$.

Тогда, воспользовавшись выражением для инвестиций в разложении (4.5.1), получим $b(Y_n - A) = K_n - K_{n-1}$.

Поэтому, из соотношения (4.5.2): $b(Y_n - A) = \frac{1}{a}(Y_n - Y_{n-1})$.

Перегруппируем слагаемые и приведем выражение к стандартному линейному разностному уравнению 1-го порядка:

$$abY_n - abA = Y_n - Y_{n-1}; \qquad (ab-1)Y_n = -Y_{n-1} + abA;$$

$$Y_n = \frac{1}{1-ab}Y_{n-1} - \frac{abA}{1-ab}. \tag{4.5.13}$$

Решение уравнения (4.5.13)

$$Y_n = \left(\frac{1}{1-ab}\right)^n Y_0 - \frac{abA}{1-ab}\,\frac{1-\left(\frac{1}{1-ab}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1-ab}\right)}$$

несложно преобразовать к виду $Y_n = \left(\frac{1}{1-ab}\right)^n Y_0 - A\left(1-\left(\frac{1}{1-ab}\right)^n\right)$,

а его к виду $Y_n = A + \left(\frac{1}{1-ab}\right)^n (Y_0 - A)$.

Полученный результат вполне соответствует ожиданиям: чем выше отдача капитала, выраженная коэффициентом a, и склонность к инвестированию, выраженная коэффициентом b, тем больше коэффициент роста ВВП $\left(\frac{1}{1-ab}\right)$.

Кроме того, чем лучше стартовые условия, в данном случае

$(Y_0 - A)$ - часть ВВП, не используемая на потребление товаров первой необходимости в начальный момент времени, тем больше величина будущего ВВП.

Дифференциальная (непрерывная) модель.

Записывая инвестиции, как разность ($I_n = K_n - K_{n-1}$), мы пренебрегаем фактом непрерывного изменения капитала. Поэтому, ученые-экономисты считают, что более уместно записывать функцию инвестиций в виде

$I = K'$, где K' - производная от функции капитала по времени.

Тогда, из (4.5.12) получаем $I = \frac{1}{a} Y'$, и как следствие, из разложения (4.5.11), дифференциальное уравнение $b(Y - A) = \frac{1}{a} Y'$.

Его можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$Y' - abY = -abA. \qquad (4.5.14)$$

Проинтегрировав уравнение (4.5.14), получим $Y = A + Ce^{abt}$.

Обозначив через Y_0 значение ВВП в начальный момент времени и выразив С через Y_0, получим, что величина валового внутреннего продукта в момент времени t есть число $Y = A + (Y_0 - A)e^{abt}$.

Вид функции Y позволяет повторить утверждения, высказанные в связи с решением, полученным из разностной модели: чем выше отдача капитала, выраженная коэффициентом a, и склонность к инвестированию, выраженная коэффициентом b, тем быстрее растет ВВП.

Кроме того, чем лучше стартовые условия (величина $Y_0 - A$), тем больше будущее ВВП.

4.5.4. Модель ценообразования. 1

Анализ изменения цены взаимозаменяемых товаров (товаров-субститутов), выпускаемых двумя фирмами показал следующее:

фирма ЛИД в каждом периоде определяет цену в каждом периоде, как 80% своей цены предыдущего периода плюс $20;

фирма ФОЛ назначает цену, взяв 70% своей цены и 30% цены фирмы ЛИД предыдущего периода.

Требуется выяснить, как будут меняться цены в будущем, зная, что в начальный момент времени цена товара фирмы ЛИД \$120, цена товара фирмы ФОЛ \$130.

Разностная (дискретная) модель

Пусть x_n – это цена товара фирмы ЛИД, а y_n – цена товара фирмы ФОЛ в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_n = 0{,}8x_{n-1} + 20, \quad x_0 = 120, \\ y_n = 0{,}3x_{n-1} + 0{,}7y_{n-1}, \quad y_0 = 130. \end{cases} \qquad (4.5.15)$$

Из 1-го уравнения системы (4.5.15), воспользовавшись формулой (4.5.7), получим функцию, описывающую изменение цены товара фирмы ЛИД

$$x_n = (0{,}8)^n \cdot 120 + 20\frac{1-(0{,}8)^n}{1-0{,}8} = (0{,}8)^n \cdot 20 + 100.$$

Подставив значение x_n во 2-ое уравнение системы (4.5.15), получим уравнение $y_n = 0{,}7y_{n-1} + 6(0{,}8)^{n-1} + 30$.

Его решение, описывающее изменение цены товара фирмы ФОЛ, опять же по формуле (4.5.7):

$$y_n = (0{,}7)^n \cdot 130 + 30\frac{1-(0{,}7)^n}{1-0{,}7} + 6\,\frac{(0{,}8)^n - (0{,}7)^n}{0{,}8-0{,}7} =$$
$$= (0{,}8)^n \cdot 60 - (0{,}7)^n \cdot 30 + 100.$$

Нетрудно заметить, что если политика ценообразования не будет меняться, то цена товара фирмы ЛИД, также как и цена товара фирмы ФОЛ, будет стремиться к \$100.

Дифференциальная (непрерывная) модель

Для того описать ситуацию на языке дифференциальных уравнений, запишем систему (4.5.15) в виде

$$\begin{cases} x_n = (1-0{,}2)x_{n-1} + 20, & x_0 = 120, \\ y_n = 0{,}3x_{n-1} + (1-0{,}3)y_{n-1}, & y_0 = 130, \end{cases}$$

и повторив рассуждения, приведенные в предыдущих пунктах, получим систему

$$\begin{cases} x' = -0{,}2x + 20, & x_0 = 120, \\ y' = 0{,}3x - 0{,}3y, & y_0 = 130. \end{cases} \qquad (4.5.16)$$

Из 1-го уравнения системы (4.5.16) и формулы (4.5.7а), получим $x(t) = 100 + Ce^{-0,2t}$. Начальное условие дает равенство $120 = 100 + C$.

Следовательно, функция, описывающая изменение цены товара фирмы ЛИД $x(t) = 100 + 20e^{-0,2t}$.

Подставив значение $x(t)$ во 2-ое уравнение системы (4.5.16), получим уравнение $y' = -0{,}3y + 30 + 6e^{-0,2t}$. Решив это уравнение (см. формулу (4.5.7а)), получим, что $y(t) = 100 + 60e^{-0,2t} + C_1 e^{-0,3t}$.

Определив из начального условия значение коэффициента C_1, получим, что функция, описывающая изменение цены товара фирмы ФОЛ

$$y(t) = 100 + 60e^{-0,2t} - 30e^{-0,3t}.$$

Далее представлена модель, которая показывает, как могут меняться цены в условиях дуополии – в случае, когда на рынке действуют две конкурирующие фирмы. Эта ситуация будет описана с помощью системы линейных уравнений, которая будет решаться путем сведения к уравнению 2-го порядка. В связи с этим, следующий пункт будет посвящен изложению метода решения таких уравнений.

4.5.5. Модель ценообразования. 2

Тщательно проанализировав рынок часов, Юля установила, что две фирмы, АЛЬФА и БЕТТА, конкурирующие на этом рынке в каждом периоде устанавливают цены на свою самую дешевую модель следующим образом.:

АЛЬФА берет половину своей цены прошлого периода и добавляет к ней 40% цены, которая была у часов фирмы БЕТТА в прошлом периоде.

В свою очередь, БЕТТА берет 60% цены АЛЬФА и 30% своей цены и добавляет к полученной сумме \$5,5.

Зная, что в начальный момент времени цена часов в фирме АЛЬФА $10, а в фирме БЕТТА $12,5, Юля собирается проследить динамику изменения цен. Проделаем это вместе с нею.

Разностная (дискретная) модель

Пусть x_n – это цена часов фирмы АЛЬФА, а y_n – фирмы БЕТТА в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}4y_n & x_0 = 10, \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n + 5{,}5, & y_0 = 12{,}5. \end{cases} \qquad (4.5.17)$$

Выразим y_n из 1-го уравнения системы (3.10.17)

$$y_n = 2{,}5x_{n+1} - 1{,}25x_n \qquad (4.5.18)$$

и подставив соответствующие значения во 2-е уравнение этой системы, получим

$$2{,}5x_{n+2} - 1{,}25x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3(2{,}5x_{n+1} - 1{,}25x_n) + 5{,}5.$$

Приведем подобные члены $2{,}5x_{n+2} - 2x_{n+1} - 0{,}225x_n = 5{,}5,$

и разделив уравнение на 2,5, получим линейное разностное уравнение второго порядка:

$$x_{n+2} - 0{,}8x_{n+1} - 0{,}09x_n = 2{,}2. \qquad (4.5.19)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$k^2 - 0{,}8k - 0{,}09 = 0$ имеет корни $-0{,}1$ и $0{,}9$.

Следовательно, уравнение (4.5.19) эквивалентно цепочке уравнений

$$z_{n+1} + 0{,}1z_n = 2{,}2, \qquad (4.5.20)$$

$$x_{n+1} - 0{,}9x_n = z_n. \qquad (4.5.21)$$

При этом, из начальных условий и 1-го уравнения системы (4.5.17) следует, что $x_1 = 10$, а из этого факта и уравнения (4.5.20) $z_0 = 1$.

Тогда, $$z_n = (-0{,}1)^n \cdot 1 + 2{,}2\frac{1-(-0{,}1)^n}{1-(-0{,}1)} = 2 - (-0{,}1)^n .$$

В результате, решение уравнения (4.5.19) свелось к решению уравнения

$$x_{n+1} - 0{,}9x_n = 2 - (-0{,}1)^n.$$

Поэтому,

$$x_n = (0,9)^n \cdot 10 + 2\frac{1-(0,9)^n}{1-0,9} - \frac{(-0,1)^n - (0,9)^n}{-0,1-0,9} = 20 + (-0,1)^n - 11(0,9)^n.$$

Соберем подобные члены, и получим, что изменение цены часов фирмы АЛЬФА описывается функцией $x_n = 20 + (-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n$.

Для того чтобы получить подобный результат для фирмы БЕТТА достаточно подставить найденное значение x_n в формулу (4.5.18):

$y_n = 2,5[20 + (-0,1)^{n+1} - 11\cdot(0,9)^{n+1}]x_{n+1} - 1,25[20 + (-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n] =$

$= 25 - 1,5\cdot(-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n$.

В результате, Юля может сделать заключение, что если политика ценообразования не будет меняться, то через большой интервал времени, цена часов фирмы АЛЬФА стабилизируется на уровне $20, а фирмы БЕТТА на уровне $25.

Кроме того, полученные формулы позволяют спрогнозировать цены на более короткие промежутки времени. Так, если цены меняются 1 раз в полугодие, то через 4 года цена часов фирмы АЛЬФА будет равна

$x_8 = 20 + (-0,1)^8 - 11\cdot(0,9)^8 \approx \$15,26,$

а фирмы БЕТТА $y_8 = 25 - 1,5\cdot(-0,1)^8 - 11\cdot(0,9)^8 \approx \$20,26.$

Дифференциальная (непрерывная) модель

Для того чтобы воспользоваться непрерывной моделью, перепишем систему (4.5.17) в виде
$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = -0,5x_n + 0,4y_n & x_0 = 10, \\ y_{n+1} - y_n = 0,6x_n - 0,7y_n + 5,5, & y_0 = 12,5. \end{cases}$$

и предположив, что цена меняется непрерывно, получим систему
$$\begin{cases} x' = -0,5x + 0,4y, & x_0 = 10, \\ y' = 0,6x - 0,7y + 5,5, & y_0 = 12,5. \end{cases} \qquad (4.5.22)$$

Из 1-го уравнения системы (4.5.22) выразим y:
$$y = 2,5\,x' + 1,25x \qquad (4.5.23)$$

и подставив во 2-е уравнение, получим
$$2,5x'' + 1,25x' = 0,6x - 0,7(2,5x' + 1,25x) + 5,5\,.$$

Соберем подобные члены и, разделив полученное уравнение на 2,5, получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x'' + 1{,}2x' + 0{,}11x = 2{,}2. \qquad (4.5.24)$$

Теорема 1 позволяет записать уравнение (25) в виде цепочки

$$x' + 1{,}1x = z, \quad x(0) = 10; \qquad (4.5.25)$$

$$z' + 0{,}1z = 2{,}2, \quad z(0) = 11. \qquad (4.5.26)$$

(Для того чтобы получить значение $z(0)$, вычислим $x'(0) = -0{,}5\cdot 10 + 0{,}4\cdot 12{,}5 = 0$, и подставим в уравнение (4.5.25).)

Общее решение уравнения (4.5.26): $z = 22 + Ce^{-0{,}1t}$.

Определим значение C: $11 = 22 + C$, и получим, что решение уравнения (4.5.24) с соответствующими начальными условиями, есть решение задачи

$$x' + 1{,}1x = 22 - 11e^{-0{,}1t}, \quad x(0) = 10.$$

Ее решение $x = 20 - 11e^{-0{,}1t} + e^{-1{,}1t}$.

Использовав найденное выражение для x, из (4.5.23) найдем формулу для определения цены фирмы БЕТТА:

$$y = 2{,}5\left(20 - 11e^{-0{,}1t} + e^{-1{,}1t}\right)' + 1{,}25(20 - 11e^{-0{,}1t} + e^{-1{,}1t}) = 25 - 11e^{-0{,}1t} - 1{,}5e^{-1{,}1t}.$$

Примечание

Рассматривая рынки, на которых действуют три, четыре и т.д. фирмы, можно получать примеры приложений уравнений 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Заключение по главе 4

Когда ученые хотят выразить на математическом языке движущиеся, изменяющиеся или развивающиеся явления, они вводят в уравнения характеристики этого движения, изменения — скорости, а то и ускорения. Так появляются в науке дифференциальные уравнения, в которые неизвестные величины входят не сами по себе, как в алгебраические уравнения с «иксами», не под знаком логарифмической или тригонометрической функции, как в трансцендентные уравнения, а в виде производных — в виде скоростей изменения неизвестных. Подавляющее большинство природных процессов описывается именно такими уравнениями.

Важнейшей особенностью глав 3 и 4 является то, что для анализа экономических ситуаций используются методы решения дифференциальных уравнений и систем, а также их дискретного аналога — разностных уравнений, разработанные автором, совместно с А.Б. Урдалетовой [120-143].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Историю часто делают маленькие группы дальновидных новаторов, а не оглядывающиеся назад и цепляющиеся за прошлое массы. Так, в 1850 году более 90% жителей Земли были крестьянами. Но судьба этих крестьян была уже определена в Манчестере и Бирмингеме кучкой инженеров, политиков и финансистов, запустивших промышленную революцию. Индия Даянанды и Судан Махди (Даянанда и Махди — видные религиозные деятели середины XIX века) продолжали думать только о Боге, вместо того чтобы заняться паровыми двигателями, поэтому оказались захвачены и порабощены промышленной Британией.

В начале XXI века поезд прогресса снова отправляется в путь. Скорее всего это последний поезд, отъезжающий от станции под названием Homo Sapiens. Тем, кто опоздает, второго шанса не представится. Социализм, очень своевременный сто лет назад, не смог идти в ногу с новейшими технологиями. Леонид Брежнев и Фидель Кастро продолжали держаться за идеи, сформулированные Марксом и Лениным в эпоху паровых двигателей, и недооценили потенциал компьютеров и биотехнологий. Если бы Маркс на время вернулся к жизни, он, скорее всего, посоветовал бы своим стойким последователям уделять больше времени изучению интернета и человеческого генома, чем чтению «Капитала» - [144].

Свое место в поезде прогресса по праву занимает Китай, с успехом оспаривающий звание сильнейшей экономической державы у США. Благодаря реформам под руководством Дэн Сяопина с 1978 по 2017 год ВВП на душу населения в Китае вырос почти в 24 раза. Общеизвестно, что в числе главных факторов, определивших успех реформ, был достаточно высокий уровень образования населения Китая [145].

Для того чтобы подкрепить тезис о важности образования приведем слова другой легендарной личности. «Образованные, талантливые люди являются теми дрожжами, которые заставляют общество расти и преобразовывают его», - писал Ли Куан Ю, бывший премьер-министр Сингапура, деятельностью которого во многом предопределила успехи его Родины [146].

- Традиционный взгляд на мир как на пирог неизменного размера предполагает, что в мире есть всего два вида ресурсов: сырье и энергия. На самом деле видов ресурсов три: Сырье, энергия и знания. Сырье и энергия не возобновляемы — чем больше вы их используете, тем меньше у вас остается. Знание, напротив, накапливаемый ресурс — чем больше вы их используете, тем больше его у вас становится.

В средневековой Европе главная формула получения знания была такова: *Знание = Священное Писание* x *Логика*. Если люди хотели получить ответ на важный вопрос, они читали священные книги и применяли логику для понимания точного смысла написанного.

Научная революция вывела совершенно новую формулу получения знания: *Знание = Эмпирические знания* x *Математика*. Если мы хотим получить ответ на какой-то вопрос, то должны собрать соответствующие эмпирические данные и проанализировать их с применением математических инструментов -[144].

На наш взгляд одной из главных проблем экономического образования в Кыргызстане является очень низкий уровень преподавания количественных методов. Он определяется оторванностью содержания математических курсов, преподаваемых будущим экономистам от реальных экономических проблем. Поэтому, главной задачей, которую мы пытаемся решить, является повышение уровня использования математического инструментария при исследовании проблем из окружающей жизни.

«Если кризис закончится, то с какой отрасли, в первую очередь, начнете реформу?» - спросил 30 апреля депутат Жогорку Кенеша Каныбек Иманалиев («Ата Мекен») на заседании парламента. Премьер-министр Мухаммедкалый Абылгазиев сказал, что начнут с реформы Налогового кодекса. «Налоги надо упростить. Некоторые виды налогов, если вы согласны, надо будет надо упразднить. У нас должна быть простая экономика, где будет 2-3 вида налогов. Думаю, этот вопрос решим вместе», - сказал премьер [147].

Это еще одно свидетельство того, какое внимание уделяется в обществе проблемам налогообложения [148, 149].

Эта проблема является главной, вокруг которой строится изложение материала первой главы диссертации. На достаточном количестве примеров, с опорой на экономическую теорию, показано, что паушальный налог в виде обязательного патента, является очень подходящим для экономики Кыргызстана. Хочется верить, что он будет в числе тех 2-3 видов налогов, которые планирует оставить правительство Кыргызстана.

Другая, не менее животрепещущая проблема — дороговизна кредитов в Кыргызстане, рассматривается во второй главе.

- В Европе, Америке, Японии, Китае, Корее и других успешных странах создание дешевых кредитных ресурсов и управление механизмами доведения этих ресурсов до инновационных секторов экономики в целях поддержки инвестиционной активности является главным направлением макроэкономической политики.

Наш банковский сектор монополизирован — на долю трех контролируемых государством банков приходится 70% всех его активов. При этом государство никак этими банками не управляет — только бесконечно спасает их от кризисов, накачивая бюджетными деньгами и избавляя их руководителей от ответственности за эффективность их работы. Им никто не дает никаких заданий, и высший менеджмент этих банков ведет себя так, как будто это их личные структуры. Они произвольно устанавливают ставки процента и им нет дела до развития экономики. – Это выдержки из книги известного российского экономиста, академика Сергея Глазьева [150].

Почти слово в слово это можно отнести к банковскому сектору Кыргызстана. К сожаленью приходится констатировать, что у нас ситуация еще хуже. Мы убеждены, что должен измениться государственный подход — главной задачей

Национально Банка Кыргызской Республики должно быть достижение экономического роста.

- Хотя сторонники индуизма, правоверные мусульмане, японские националисты и китайские коммунисты заявляют сегодня о своей приверженности абсолютно разным ценностям и целям — все они убеждены, что ключом к реализации их столь разных устремлений является экономический рост. В Китае коммунистическая партия, все еще превозносящая марксистско-ленинские идеалы, на самом деле руководствуются максимами Дэн Сяопина: «развитие — единственная правда» и «не важно, какого цвета кошка — черная или белая, лишь бы она ловила мышей». Что означает: добивайтесь экономического роста любыми методами, не боясь огорчить Маркса и Ленина.

Сингапур, как и подобает такому серьезному, деловому городу-государству, идет в этом направлении еще дальше и привязывает министерские зарплаты к номинальному ВВП. - [144]

Важную роль в улучшении финансовой сферы должно сыграть повышение финансовой грамотности населения. Надеемся, что свой вклад в финансовое просвещенье внесет последовательное изложение элементов финансовых вычислений на языке разностных уравнений, приведенное во второй главе.

Для современных научных исследований характерен переход от рассмотрения статических моделей к динамическим. Важно уметь определять рыночную цену товара, но боле важно понимать, как будет меняться эта цена при изменении внешних условий. Главным инструментом таких исследований являются разностные и дифференциальные уравнения. Но при их использовании, экономисты сталкиваются с определенными проблемами. Они определяются тем, что традиционные методы решения таких уравнений слишком большое внимание уделяют теоретическим вопросам: существование решений, их единственность, структура и так далее. Это не нужно для прикладных исследований. Поэтому, на наш взгляд, очень важен метод прямого интегрирования дифференциальных уравнений и его дискретный аналог для разностных уравнений, изложенный в третьей и четвертой главах. Этот метод, разработанный Кыдыралиевым С.К. и

Урдалетовой А.Б. получил международное признание и опубликован в журналах, имеющих высокий научный рейтинг [123, 143].

ВЫВОДЫ

Диссертационное исследование посвящено вопросам использования количественных методов в экономике. Решается двуединая задача: разрабатываются новые количественные методы решения экономических задач, а также указываются новые области применения количественных методов в экономике.

Наиболее существенные результаты, полученные в результате исследования, заключаются в следующем:

1) Показано, что использование прямых налогов, таких как паушальный, оказывает меньшее негативное воздействие на экономическое поведение фирм, чем применение косвенных налогов (акцизный, НДС, …). В частности, паушальный налог не меняет равновесную рыночную цену и равновесный объем рынка. Этим объясняются успехи, достигнутые при введении патентной системы в экономике Кыргызстана.

2) Доказано наличие элементов картеля в банковском секторе Кыргызской Республики. Высокая стоимость кредитов, малый объем кредитования оказывают крайне негативное воздействие на экономику Кыргызстана.

3) Оказывается все основные элементы финансовых расчетов: сложный интерес, будущее значение аннуита, амортизация, ипотечные расчеты, оценка стоимости акций, облигаций и многое другое можно излагать по единой методике — на основе линейных разностных уравнений.

4) Использование метода прямого интегрирования позволяет значительно расширить круг экономических задач, при анализе которых можно использовать разностные и дифференциальные уравнения.

Результаты диссертационного исследования, представляющие научную новизну:

проанализировано влияние налогов на зону прибыли;

выявлено, что в основе всех современных методов амортизации лежат свойства арифметической и геометрической прогрессий;

уточнено понятие эластичности и выявлено, что дуговая эластичность не помогает при анализе рыночной ситуации;

разработана модель ипотеки с выплатами, предусматривающими рост по арифметической прогрессии;

введено понятие чистой будущей стоимости инвестиционного проекта;

решена проблема множественного IRR;

получена формула, связывающая индекс рентабельности и коэффициент NPV;

получена формула зависимости уровня безработицы от темпов роста населения;

предложен новый метод решения линейных разностных и дифференциальных уравнений первого порядка;

для анализа важных экономических проблем, в частности, для модели «спрос-предложение», предложен новый метод решения линейных разностных и дифференциальных уравнений высших порядков;

для моделей ценовой конкуренции и схожих проблем применен новый метод решения систем линейных разностных и дифференциальных уравнений;

исследован обобщенный вариант модели Самуэльсона-Хикса.

Теоретические и методические разработки диссертации могут быть положены в основу для дальнейших научных исследований и внесены в программы обучения студентов вузов, облегчая задачу обучения основам математического моделирования экономических и бизнес-процессов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Результаты исследования могут быть полностью или частично применены государственными органами при решении задач, сформулированных в Программы развития КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ на период 2018-2022 гг. «ЕДИНСТВО, ДОВЕРИЕ, СОЗИДАНИЕ», Национальной стратегии развития Кыргызской Республики на 2018-2040 годы, а именно:

- для обеспечения экономического роста;

- для учета влияния принимаемых решений на экономику на микро и макроуровнях;

- для совершенствования налоговой политики и реформирования действующей системы налогообложения в целях увеличения поступления налогов в республиканский бюджет;

для повышения финансовой грамотности населения;

для улучшения качества документов, принимаемых на уровне Жогорку Кенеша, правительства, местных органов власти.

Доказанное в диссертации наличие элементов картеля в банковском секторе Кыргызской Республики может быть основанием для принятия мер для ограничения ставок по кредитам.

Предложенный в диссертации новый метод вычисления инвестиционных коэффициентов может улучшить качество анализа инвестиционных проектов, а новый инвестиционный коэффициент NFV — Чистая Будущая Стоимость —может способствовать увеличению количества осуществляемых проектов, обеспечивая экономический рост.

Разработанный автором и изложенный в диссертации метод прямого интегрирования линейных дифференциальных уравнений, и его дискретный аналог для линейных разностных уравнений, позволяет существенно расширить область использования количественных методов для решения экономических задач.

Теоретические и методические разработки диссертации используются в учебном процессе ВУЗов при обучении студентов экономических специальностей.

В частности, учебник «Основы финансовых и инвестиционных расчетов», написанный совместно с Т.К. Камчыбековым и А.Б. Урдалетовой, приказом №809/1 от 6.06.2016 Министерства образования и науки Кыргызской Республики допущен в качестве учебника для студентов вузов.

Теоретические и методические разработки диссертации могут стать основой для дальнейших научных исследований и внесены в учебники и учебные пособия для учащихся школ и студентов вузов, способствовать повышению математической грамотности и овладению основами математического моделирования экономических явлений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Список стран по ВВП (номинал) на душу населения [Электронный ресурс] // URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_стран_по_ВВП_(номинал)_на_душу_населения (19.03.2020).

2. Национальная стратегия устойчивого развития Кыргызской Республики (НСУР) на период 2013-2017 годы [Электронный ресурс] // URL : http://cbd.minjust.gov.kg/act/view/ru-ru/61542 (19.03.2020).

3. Закон о Народном Банке КНР [Электронный ресурс] // URL : http://russian.china.org.cn/links/txt/2007-09/25/content_8946699.htm (29.02.2020).

4. Пикетти, Томас. Капитал в XXI веке [Текст] / Т. Пикетти. – М.: Ад Маргинем Пресс, 2015. – 592 с.

5. О чем думают экономисты. Беседы с нобелевскими лауреатами. Под редакцией Самуэльсона П. и Барнетта У. [Текст] / П. Самуэльсон, У. Барнетт – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 490 с.

6. Программа развития КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ на период 2018-2022 гг. «ЕДИНСТВО, ДОВЕРИЕ, СОЗИДАНИЕ» [Электронный ресурс] // URL : http://www.donors.kg/images/Программа_развития_КР _2018-2022.pdf (9.03.2020).

7. Национальная стратегия развития Кыргызской Республики на 2018-2040 годы [Электронный ресурс] // URL : http://www.stat.kg/ru/nsur/ (9.03.2020).

8. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Дайырбекова, Г.М. Математика. 5 [Текст] : учебник для школ / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Г.М. Дайырбекова. – Б.: Аркус, 2019. – 288 с.

9. Рокфеллер, Дэвид. Банкир в XX веке. Мемуары [Текст] / Д. Рокфеллер - М.: Международные отношения, 2003. – 504 с.

10. Уровень жизни спустя 25 лет [Электронный ресурс] // URL : http://mirperemen.net/2016/08/posle-socializma-uroven-zhizni-25-let-spustya/ (5.01.2020).

11. Малый бизнес. Зарубежный опыт [Электронный ресурс] // URL : https://center-yf.ru/data/ip/malyy-biznes-zarubezhnyy-opyt.php (15.01.2020).

12. Datar, S.M., Rajan, M.V. Horngren's cost accounting: A managerial Emphasis [Текст] / S.M. Datar, M.V. Rajan. — New Jersey: Pearson, 2018. — p. 820.

13. Garrison, R.H., Noreen E.W., Brewer, P.C. Managerial Accounting [Текст] / R.H. Garrison, E.W. Noreen, P.C. Brewer. — New York: McGraw-Hill, 2018. — p. 932.

14. Кыдыралиев, С.К. Математические методы в экономике [Текст] / С.К. Кыдыралиев. – Б.: КРСУ, 2010. – 228 с.

15. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Математические модели в теории управления и исследование операций [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. – Б.: АУПКР, 2010. – 205 с.

16. Airbus прекращает производство широкофюзеляжных самолетов A380 [Электронный ресурс] // URL : https://www.mandria.ua/all/52695 (15.01.2020).

17. Стиглиц Дж.Ю. Экономика государственного сектора [Текст] / – Дж.Ю. Стиглиц. — М.: Изд-во МГУ: ИНФРА-М, 1997. – 720 с.

18. Кыдыралиев, С.К. Влияние налогов на предпринимательскую деятельность [Текст] / С.К. Кыдыралиев // Материалы межд. конгресса Предпринимательство. — Б.: КТУ «МАНАС». — 2006. – С. 191-195.

19. Кыдыралиев, С.К. Какие налоги нам нужны [Текст] / С.К. Кыдыралиев // Материалы межд. круглого стола. – Б.: Исследовательский. центр Политика, религия и безопасность. — 2006. – С. 46-51.

20. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К., Керимкулова, Г.А. Будет ли успешной налоговая реформа? [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков, Г.А. Керимкулова. // Б.: Вестник КЭУ. №3(9). — 2008. – С. 144-147.

21. Кыдыралиев, С.К., Керимкулова, Г.А., Кыдыралиева К.С. Можно ли снизить уровень коррупции в Кыргызстане? [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Г.А. Керимкулова, К.С. Кыдыралиева // Б.: Высшее образование Кыргызской Республики. №3/5. — 2009. – С. 53-58.

22. Кыдыралиев, С.К., Сулейманова, Г.А. Налоги: хотели как лучше, а получилось как всегда [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Г.А. Сулейманова. // Б.: Вестник КНУ. Серия 3, выпуск 4. — 2010. – С. 148-154.

23. Кыдыралиев, С.К. Смена правительства. Некоторые итоги и ожидания [Текст] / С.К. Кыдыралиев. // Б.: Вестник КЭУ. №2(33). — 2015. – С. 27-31.

24. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К. Геракл, Антей и коррупция [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков. // Б.: Вестник КЭУ. №1(46). — 2019. – С. 17-20.

25. Пиндайк Р., Рабинфельд Д. Микроэкономика [Текст] / Р. Пиндайк, Д. Рабинфельд. – С-Пб. : Питер, 2012. – 608 с.

26. Смит, А. Исследование о природе и причинах богатства народов [Текст] / А. Смит. – М. : Соцэкгиз, 1962. – 684 с.

27. Мэнкью, Н.Г., Тейлор, М. Микроэкономика [Текст] / Н.Г. Мэнкью, М. Тейлор. – С-Пб. : Питер, 2013 – 810 с.

28. Нуреев, Р.М. Курс микроэкономики [Текст] / Р.М. Нуреев. – М. : Инфра-М, Норма, 2011 – 648 с.

29. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Pyasa Fiyati Degisimini Aciklayan Modeller (Вокруг модели спроса и предложения) *На турецком языке* [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // S. Demirel Universitesi, IIBF dergisi. – 2005. С. 11-19.

30. Кыдыралиев, С.К. Новый взгляд на эластичность [Текст] / С.К. Кыдыралиев. // Б.: Вестник КРСУ. Том 6, №4. — 2006. – С. 31-36.

31. Кыдыралиев, С.К. Эластичность: требуются уточнения [Текст] / С.К. Кыдыралиев. // Алматы: АТСО. Сборник материалов международной научно-практической конференции. Казахстан и страны СНГ. 20 лет интеграции. Т.1. - 2011. - С. 48-55.

32. Slavin, Stephen. Economics [Текст] / S. Slavin. — Chicago: Irwin, 1996 – p. 824.

33. Фишер, С., Дорнбуш, Р., Шмалензи, Р. Экономика. [Текст] / С. Фишер, Р. Дорнбуш, Р. Шмалензи. – М.: Дело ЛТД, 1993 – 864 с.

34. Хайман, Д. Н. Современная микроэкономика: анализ и применение. В 2-х т. Т.1 [Текст] /Д. Н. Хайман — М.: Финансы и статистика, 1992 — 384 с.

35. Бабаев, Ю.А., Комиссарова, И.П., Бородин, В.А. Бухгалтерский учет: Учебник для студентов вузов [Текст] / Ю.А. Бабаев, И.П. Комиссарова, В.А. Бородин — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005 - 527 с.

36. Нидлз, Б., Андерсон, Х., Колдуэлл, Д. Принципы бухгалтерского учета [Текст] / Б. Нидлз, Х. Андерсон, Д. Колдуэлл — М.: Финансы и статистика, 2003 - 495 с.

37. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Методы амортизации: математический подход [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КЭУ, №3(13) — 2009. – С. 51-53.

38. Кыдыралиев, С.К., Дружинин, П.В. Математический подход к методам амортизации [Текст] / С.К. Кыдыралиев, П.В. Дружинин //Вестник Самарского государственного экономического университета, №7(8) — 2011. – С. 63-66.

39. Кыдыралиев, С.К. Какие налоги нужны экономике [Текст] / С.К. Кыдыралиев // Б.: Реформа, №3(27) — 2005 – С. 32-37.

40. Кыдыралиев, С.К. Почему американская экономика самая сильная или налоги, налоги, налоги [Текст] / С.К. Кыдыралиев // Б.: Кыргызский аналитический журнал АКИpress, №12 — 2005 – С. 12-16.

41. Кыдыралиев, С.К. Использование производной при решении экономических задач [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник КЭУ, №1(7) — 2008. – С. 21-23.

42. Кыдыралиев, С.К. Реалии Кыргызстана в свете экономической теории [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник КЭУ, №3(9) — 2008. – С. 153-157.

43. Кыдыралиев, С.К. Слишком высокие ставки по кредитам. Что делать? [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Высшее образование Кыргызской Республики, №4/18 — 2012. – С. 52-55.

44. Кыдыралиев, С.К. Налог, подходящий Кыргызстану [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Экономика. ИЭ НАН КР. №2(16) — 2013. – С. 34-40.

45. Кыдыралиев, С.К. Влияние человеческого фактора на развитие экономики [Текст] / С.К. Кыдыралиев // Алматы: АТСО. Сборник материалов международной научно-практической конференции. Теоретико-прикладные

аспекты социально-эконом. и полит. развития стран Центральной Азии и СНГ. Т.2. - 2013. - С. 67-74.

46. Кыдыралиев, С.К. Проблемы в экономике Кыргызстана: Кто виноват? Что делать? [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник КЭУ, №4(27) — 2013. – С. 125-129.

47. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К., Касымов А.Э. Что день грядущий нам готовит? Кыргызстан и ЕАЭС. [Текст] // С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков, А.Э. Касымов //Б.: Вестник КЭУ, №3(30) — 2014. – С. 18-22.

48. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Кыдыралиева, К.С. Использование динамических моделей для изучения проблем криминалистики и экономики [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, К.С. Кыдыралиева // Глава 2 в книге Социо-экономические стратегии, Lambert Academic Publishing — 2017. – С. 12-27.

49. Сталин, И.В. Сочинения. Т. 8. [Текст] / И.В. Сталин – М. : ОГИЗ; Государственное издательство политической литературы, 1948. С. 116–148.

50. Дефицит (-), профицит государственного бюджета [Электронный ресурс] // сайт статистического комитета Кыргызской республики. – URL : http://www.stat.kg/ru/opendata/category/36/ (05.03.2020).

51. Афоризмы и цитаты о налогах [Электронный ресурс] // Livejournal. – URL : https://etf-investing.livejournal.com/25109.html (05.03.2020).

52. Стиглиц, Дж.Ю. Экономика государственного сектора [Текст] / Дж.Ю. Стиглиц — М.: Изд-во МГУ: ИНФРА-М, 1997 - 720 с.

53. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Удивительные прогрессии [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б.Урдалетова -Б.: КЕНЕШ, 2014. – 140 с.

54. Отмена патентов не приведет к увеличению сбора налогов [Электронный ресурс] // 24.kg. – URL : https://24.kg/ekonomika/128579_gulnara_uskenbaeva_otmena_patentov_neprivedet_kuvelicheniyu_sbora_nalogov/ (05.03.2020).

55. Добрецова, Н. Н. Романтика капитала. Истории о рынке ценных бумаг Кыргызстана [Текст] / Н. Н. Добрецова - Б.: ФК Сенти, 2007. – 264 с.

56. Миллер, Р.Л., Ван-Хуз, Д.Д. Современные деньги и банковское дело [Текст] / Р.Л. Миллер, Д.Д. Ван-Хуз — Москва : ИНФРА-М, 2000. - 856 с

57. Бирман, Г., Шмидт, С. Экономический анализ инвестиционных проектов [Текст] / Г. Бирман, С. Шмидт - М. : Банки и биржи, 1997. - 631 с.

58. Кредиты коммерческих банков [Электронный ресурс] // сайт Национального Банка Кыргызской Республики. – URL : https://www.nbkr.kg/index1.jsp?item=125&lang=RUS (05.03.2020).

59. Крушвиц, Л. Инвестиционные расчеты [Текст] / Л. Крушвиц – С-Пб.: Питер, 2001. - 432 с.

60. Росс, С., Вестерфилд, Р., Джордан Б. Основы корпоративных финансов. [Текст] / С. Росс, Р. Вестерфилд, Б. Джордан - М. Лаборатория базовых знаний. 2000. -720 с.

61. Динамика валового внутреннего продукта [Электронный ресурс] // сайт Статкомитета СНГ. – URL : http://www.cisstat.com/(05.02.2020).

62. Динамика валового внутреннего продукта [Электронный ресурс] // сайт Мирового Банка. – URL : http://wdi.worldbank.org/table/WV.1/(15.02.2020).

63. Гоббс, Томас. Левифиан, или Материя, форма и власть государства, церковного и гражданского [Текст] / Т. Гоббс – М.: Мысль, 2001. – 478 с.

64. Отчете конкурентоспособности экономики [Электронный ресурс] // сайт Мирового Банка. – URL : http://data.worldbank.org/indicator/FR (29.02.2020)

65. Ставка по кредитам минус ставка по депозитам [Электронный ресурс] // сайт Мирового Банка. – URL : http://data.worldbank.org/topic/ financial-sector (29.02.2020)

66. Яковлев, Н.Н. Франклин Рузвельт — человек и политик [Текст] / Н.Н. Яковлев — М.: Международные отношения, 1969. — 504 с.

67. Цели, задачи и функции Национального банка [Электронный ресурс] // сайт Национального банка Кыргызской Республики – URL : https://www.nbkr.kg/index.jsp?lang=RUS# (25.03.2020)

68. Савватеев, А.В. Математика для гуманитариев [Текст] / А.В. Савватеев — М.: Университет Дмитрия Пожарского, 2017. — 304 с.

69. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Что лучше - синица сейчас или журавль через год? [Текст] // С.К. Кыдыралиев, А.Б.Урдалетова //Б.: Мектеп-Школа, №2 — 2000. – С. 53-57.

70. Кыдыралиев, С.К. Математические методы в экономике. 2 [Текст] / С.К. Кыдыралиев — Б.: КРСУ, 2004. – 60 с.

71. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Камчибеков Т.К. Финансовые расчеты как одна из основ развития предпринимательства [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Т.К. Камчибеков //Б.: Вестник КГУЭП, №1 — 2006. – С. 25-29.

72. Кыдыралиев, С.К. Новый подход к преподаванию финансовых расчетов [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Академический вестник АУЦА, №3 — 2005. – С. 118-125.

73. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Оздил, Т., Йылмаз, Ж. Экономикалык жана коомдук илимдер учун Математика [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Т. Оздил, Ж. Йылмаз — Б.: КТУ «Манас», 2010. – 374 с.

74. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Касымов, А.Э., Кыдыралиева, К.С. Intro to Corporate Finance and Investments. Mathematical Approach [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, А.Э. Касымов, К.С. Кыдыралиева. — Б.: AUCA, 2012. – 278 с.

75. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Основы финансовых вычислений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова — Б.: КРСУ, 2015. – 186 с.

76. Камчыбеков, Т.К., Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Основы финансовых вычислений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Т.К. Камчыбеков — Б.: Аркус, 2017. – 176 с.

77. Бригхем, Ю. Энциклопедия финансового менеджмента [Текст] / Ю. Бригхем — М.: Дело, 1999. — 724 с.

78. Капитоненко, В.В. Финансовая математика и ее приложения. [Текст] / В.В. Капитоненко — М.: Приор, 1999. — 144 с.

79. Ван Хорн, Дж. Основы управления финансами [Текст] /Дж. Ван Хорн — М.: Финансы и статистика, 2003. — 800 с.

80. Mizrahi, A., Sullivan, M. Mathematics for business and social sciences [Текст] / A. Mizrahi, M. Sullivan — USA: John Wiley & Sons, 1988. — 620 с.

81. Ben-Horim, M. Essentials of Corporate Finance [Текст] / Moshe Ben-Horim — USA: Allen & Bacon, 1987. — 566 с.

82. Cozzens, M., Porter, R. Mathematics with Calculus [Текст] / M. Cozzens, R. Porter — USA: Heath and Company, 1987. — 676 с.

83. Томас, Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности [Текст] / Р. Томас — М.: ДиС, 1999. — 432с.

84. Уотшем, Т.Дж., Паррамоу, К. Количественные методы в финансах [Текст] / Т.Дж. Уотшем, К. Паррамоу — М.: ЮНИТИ, 1999. — 527 с.

85. Замков, О.О., Черемных, Ю.А., Толстопятенко, А.В. Математические методы в экономике [Текст] / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Толстопятенко — М.: МГУ, ДиС, 1999. — 368 с.

86. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Крестьянин и черт, и что в итоге получилось из этой истории [Текст]/ С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: АУЦА. Природа университетского образования — 2000. – С. 73-79.

87. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Крестьянин и черт и … пенсии [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Мектеп-Школа, №3 — 2000. – С. 43-47.

88. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Финансовые расчеты и другие приложения разностных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова — Б.: АУЦА, 2002. – 78 с.

89. Камчибеков, Т.К., Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Финансовые расчеты на языке разностных уравнений [Текст] / Т.К. Камчибеков, С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Алматы: Журнал университета иностранных языков и деловой карьеры, №2. — 2006. – С. 173-179.

90. Кыдыралиев, С.К. Финансовая грамотность: подходы к обучению [Текст]/ С.К. Кыдыралиев //Новосибирск: Материалы межд. науч.-практ. конф. «Бизнес и

образование: интеграционная модель развития». НФ РЭУ им. Г.В. Плеханова — 2014. – С. 30-35.

91. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Оценка стоимости акций с арифметическим ростом дивидендов и смежные проблемы [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Реформа, №1(45) — 2010. – С. 43-47.

92. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Stock Valuation: Dividend Discount Models [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: КТУ «Манас», Материалы межд. научн. конф. «Экономика Евразии 2011» — 2011. – С. 283-287.

93. Кыдыралиев, С.К. Оценка стоимости акций [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник КЭУ, №3(19) — 2011. – С. 117-119.

94. В Кыргызстане государственная ипотечная программа не достигла цели [Электронный ресурс] // URL : https://24.kg/vlast/118381_vkyirgyizstane_gosudarstvennaya_ipotechnaya_programma_nedostigla_tseli/(29.02.2020).

95. Кыдыралиев, С.К. От барона Мюнхгаузена к ипотеке: задачи ипотечного кредитования на языке разностных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Академический вестник АУЦА №4 — 2006. – С. 206-214.

96. Кыдыралиев, С.К. Новый взгляд на инвестиционные коэффициенты [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник АУПКР №8 — 2008. – С. 21-28.

97. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Койчуманова, Ж.М. Линейные разностные уравнения и ипотека [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Ж.М. Койчуманова //Б.: Вестник КНУ, Серия 3, выпуск 4(8), том XII — 2009. – С. 101-108.

98. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Керимкулова, Г.А. Ипотека, разностные уравнения, аналогии и метод чайника [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Г.А. Керимкулова //Б.: Высшее образование Кыргызской Республики, №4/6 — 2009. – С. 15-18.

99. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Ипотека и линейные разностные уравнения [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КРСУ, Том 15, №3 — 2015. – С. 184-188.

100. Кыдыралиев, С.К., Крам, Р. Комплексный подход к анализу инвестиционных проектов [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Р. Крам //Б.: Вестник АУПКР, №3 — 2003. – С. 64-69.

101. Кыдыралиев, С.К. Новый взгляд на инвестиционные коэффициенты [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник АУПКР, №8 — 2008. – С. 21-18.

102. Кыдыралиев, С.К., Керимкулова, Г.А. Множественная IRR. Избыточная ликвидность банков [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Керимкулова //Б.: Вестник КНУ. Серия 2, выпуск 1, Том I — 2009. – С. 33-38.

103. Кыдыралиев, С.К., Керимкулова, Г.А. Is the NPV the best method to Evaluate Investment project? [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Г.А. Керимкулова //Б.: Proceedings of the 7-th International joint conference "Business and Economic Cooperation among the Silk road countries" — 2009. – С. 287-293.

104. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. A new approach to investment coefficients [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Istanbul, Turkey: Proceedings of the International Conference on Eurasian Economies. Beykent University — 2015. – С. 373-378.

105. Камчыбеков, Т.К., Кыдыралиев, С.К. Что делать с кредитованием? [Текст] / Т.К. Камчыбеков, С.К. Кыдыралиев // Бишкек.: Финансист, №39(120) — 2012.

106. Кыдыралиев, С.К., Кыдыралиева, К.С. Банковский сектор Кыргызстана. Анализ и предложения [Текст] / С.К. Кыдыралиев, К.С. Кыдыралиева // Б.: Сборник материалов научно-практической конференции «Вопросы применения Налогового Кодекса Кыргызской Республики» — 2012. – С. 29-33.

107. Кыдыралиев, С.К. Слишком высокие ставки по кредитам. Что делать? [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Высшее образование Кыргызской Республики, №4/18 — 2012. – С. 52-55.

108. Кыдыралиев, С.К. Эффективная ставка интереса по финансовым операциям [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Вестник КЭУ, №1(24) — 2013. – С. 67-70.

109. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К. Анализ и предложения по совершенствованию кредитования в Кыргызской Республике [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков //Б.: Вестник КЭУ, №2(25) — 2013. – С. 50-53.

110. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б., Касымов, А.Э. Банковский сектор Кыргызстана: изменения назрели [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, А.Э. Касымов //Б.: Реформа, №3(59) — 2013. – С. 10-17.

111. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К. Банковский сектор Кыргызстана: анализ и предложения [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков //Б.: Экономический вестник, №3 — 2013. – С. 18-28.

112. Кыдыралиев, С.К., Касымов, А.Э. Влияние денежной массы на экономику Кыргызстана [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Э. Касымов //Б.: Вестник КНУ. №8 — 2013. – С. 230-235.

113. Кыдыралиев, С.К. Национальный банк Кыргызской Республики и инфляция [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: Высшее образование Кыргызской Республики, №3/21 — 2013. – С. 73-76.

114. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К., Касымов, А.Э. Нужен ли Кыргызстану такой Национальный Банк? [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков, А.Э. Касымов //Б.: Вестник КЭУ, №2(29) — 2014. – С. 27-31.

115. Кыдыралиев, С.К., Камчыбеков, Т.К. Рост ВВП. Состояние банковского сектора и предпринимательства Кыргызской Республики [Текст] / С.К. Кыдыралиев, Т.К. Камчыбеков //Б.: Вестник КЭУ, №3(41) — 2017. – С. 12-14.

116. Кыдыралиев, С.К., Кыдыралиева, К.С. Статистический анализ банковского сектора Кыргызской Республики [Текст] / С.К. Кыдыралиев, К.С. Кыдыралиева // Б.: Материалы научно-практической конференции «Денежно-кредитная политика в развивающихся странах: современные тренды», АУЦА и НБКР — 2017. – С. 141-153.

117. Афоризмы. Древний мир. Античность. Составитель Кондрашов, А.П. [Текст] / А.П. Кондрашов – М.: Рипол Классик, 2000. – 512 с.

118. Мэнкью, Н.Г. Макроэкономика [Текст] / Н.Г. Мэнкью — М.: МГУ, ДиС, 1994. — 736 с.

119. Bailey, D. Mathematics in Economics [Текст] / D. Bailey — McGraw-Hill, Inc, Bercshire, England, 1998. — 485 p.

120. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Линейные дифференциальные уравнения. [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: КГНУ, Учебное пособие — 1994. — 24 с.

121. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Интегрирование ОДУ с линейной частью [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КГНУ, серия ЕТН, вып. 1 — 1995. – С. 81-83.

122. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Линейные дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КГНУ, серия ЕТН, вып. 1 — 1997. – С. 78-81.

123. Kydyraliev, S.K., Urdaletova, A.B. Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization [Текст] / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova //USA: The College Mathematics Journal, vol. 27,#3, May. — 1996. – С. 199-203.

124. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Разложение обыкновенных линейных дифференциальных операторов [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КГНУ, серия ЕТН 3, вып. 4 — 2000. – С. 67-71.

125. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Факторизация обыкновенных линейных дифференциальных операторов [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 29 — 2000. – С. 56-63.

126. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Алгоритм решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 30 — 2001. – С. 64-68.

127. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Новый алгоритм решения дифференциальных. уравнений высших порядков [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КГНУ, серия ЕТН 3, вып. 6 — 2001. – С. 47-51.

128. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения. [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: БГИЭиК, Учебное пособие — 2001. — 44 с.

129. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Моделирование экономических явлений при помощи дифференциальных и разностных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КРСУ. Том 7, №11. — 2007. – С. 53-59.

130. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Единый взгляд на уравнения Эйлера, Лагранжа и Чебышева [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Акад. Вестник АУЦА №5(2). — 2007. – С. 217-224.

131. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Дискретные и непрерывные модели ценообразования [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КЭУ, №2(8) — 2008. – С. 133-136.

132. Кыдыралиев, С.К., Кыдыралиева, К.С. Generalized cob-web model [Текст] / С.К. Кыдыралиев, К.С. Кыдыралиева // Б: Материалы научно-практического конгресса. КТУ «Манас». — 2008. - С. 331-336.

133. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. New method for solving the systems of linear differential equations [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Б: Материалы межд. научн. конф. Актуальные проблемы теории управления,… КРСУ. — 2008. - С. 160-165.

134. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Модель Самуэльсона в примерах [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КРСУ. Том 8, №10. — 2008. – С. 34-39.

135. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Новый подход к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Алматы: Вестник КазНУ. №3. — 2008. —с.134-141.

136. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Новый метод решения систем линейных дифференциальных и разностных уравнений. [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Алматы: Вестник КазНУ. №4(63). — 2009. — с.21-29.

137. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Новый подход к решению систем линейных разностных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40 — 2009. – С. 150-156.

138. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Развитие нового метода решения систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Вестник КРСУ. Том 10, №9. — 2010. – С. 143-147.

139. Kydyraliev, S.K. Difference equations [Текст] / S.K. Kydyraliev // Saarbrucken, Germany: Lambert Academic Publishing. — 2010. – 125 p.

140. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Еще раз о Шерлоке Холмсе и другие приложения дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова //Б.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42 — 2010. – С. 83-89.

141. Кыдыралиев, С.К. Разностные и дифференциальные уравнения с приложениями [Текст] / С.К. Кыдыралиев //Б.: КЭУ, Учебное пособие — 2011. — 182 с.

142. Кыдыралиев, С.К., Урдалетова, А.Б. Использование дифференциальных уравнений в экономических моделях [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // с. Булан-Соготту, Кыргызстан: Труды X межд. Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». — 2014. - С. 692-698.

143. Kydyraliev, S.K., Urdaletova, A.B. Direct Integration of Systems of Linear Differential and Difference Equations [Текст] / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // University of Niˇs, Serbia: Filomat 33:5 Filomat 33:5 — 2019. – С. 1453-1461.

144. Харари, Ю.Н. Homo Deus. Краткая история будущего. [Текст] / Ю.Н. Харари// М.: Синдбад. — 2019. — 496 с.

145. 40 лет с начала реформ Дэн Сяопина [Электронный ресурс] // URL: https://nv.ua/world/countries/40-let-s-nachala-reform-den-sjaopina-9-hrafikov-o-tom-kak-izmenilsja-kitaj-2490314.html (3.05.2020)

146. Ли Куан Ю. Мой взгляд на будущее мира. [Текст] / Ли Куан Ю // М.: Альпина. — 2017. — 658 с.

147. У нас должна быть простая экономика сказал премьер-министр. [Электронный ресурс] // URL: www.tazabek.kg/news:1614925?f=cp (3.05.2020)

148. Жапаров, А.У. Налоговая политика и проблемы государственного регулирования экономики [Текст] : Автореф. дис. … канд. экон. наук: 08.00.05. / А.У. Жапаров. – Бишкек, 2007. – 23 с.

149. Камчыбеков, Т.К., Чалова, С.Т. Реформа местного налогообложения [Текст] / Т.К. Камчыбеков, С.Т. Чалова // Рынок капитала; Бишкек. – 2006. – №9-10.

150. Глазьев, С.Ю. Экономика будущего. Есть ли у России шанс? [Текст] / С.Ю. Глазьев – М.: Книжный мир. — 2017. — 640 с.